

VŠB – Technická univerzita Ostrava

Fakulta Strojní

Katedra pružnosti a pevnosti

Výpočet hrázových dveří

Calculation of the Dam Door

Student: Bc. Martin Chalupa

Vedoucí diplomové práce: Ing. Martin Fusek, Ph.D.

Ostrava 2011



## Zadání diplomové práce

Student: **Bc. Martin Chalupa**  
Studijní program: N2301 Strojní inženýrství  
Studijní obor: 3901T003 Aplikovaná mechanika  
Téma: **Výpočet hrázových dveří**  
**Calculation of the Dam Door**

### Zásady pro vypracování:

1. Rozpracujte teorii potřebnou pro řešení hrázových dveří – rychlé děje, plasticita, atd.
2. Sestavte potřebný soubor dat nutných pro řešení.
3. Proveďte potřebné analytické a numerické výpočty.
4. Ověřte výsledky s dostupnými údaji.

### Seznam doporučené odborné literatury:

- [1] Lenert, J.: Pružnost a pevnost II, VŠB – Technická univerzita, Ostrava, 1998.
- [2] Němec, J., Dvořák, J., Höschl, C.: Pružnost a pevnost ve strojírenství, Technický průvodce 69, SNTL, Brno, 1989.
- [3] Bittnar, Z., Šejnoha, J.: Numerické metody mechaniky 1, Vydavatelství CVUT, Praha, 1992.
- [4] Lenert, J.: Úvod do metody konečných prvků, VŠB – TU Ostrava, 1999, ISBN 80 – 7078 – 686 – 8
- [5] Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L.: The Finite Element Method (Volume 1 - 3), Butterworth-Heinemann, Oxford 2000, ISBN 0-7506-5049-4
- [6] Macura, P.: Experimentální metody v pružnosti a plasticitě, VŠB – TU Ostrava, 2001, ISBN 80-7078-934-4
- [7] Brepta, R.: Rázy a vlny v pevných tělesech, ČVUT v Praze, Praha, 1971.

Formální náležitosti a rozsah diplomové práce stanoví pokyny pro vypracování zveřejněné na webových stránkách fakulty.

Vedoucí diplomové práce: **Ing. Martin Fusek, Ph.D.**

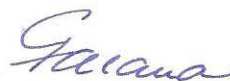
Datum zadání: 20.12.2010

Datum odevzdání: 23.5.2011





doc. Ing. Radim Halama, Ph.D.  
vedoucí katedry



prof. Ing. Radim Farana, CSc.  
děkan fakulty



**Prohlášení studenta**

Prohlašuji, že jsem celou diplomovou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě .....

.....

podpis studenta



Prohlašuji, že

- byl jsem seznámen s tím, že na moji diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. – autorský zákon, zejména §35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a §60 – školní dílo.
- беру на вѣдомі, же Высoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen VŠB – TUO) má právo nevýdělečně ke své vnitřní potřebě diplomovou práci užít (§35 odstavec 3).
- souhlasím s tím, že jeden výtisk diplomové práce bude uložen v Ústřední knihovně VŠB – TUO k prezenčnímu nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího diplomové práce. Souhlasím s tím, že údaje o diplomové práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB – TUO.
- bylo sjednáno, že VŠB – TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu §12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užít své dílo – diplomovou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB – TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB – TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- беру на вѣдомі, же оdevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě .....

.....

podpis studenta





## **ANOTACE DIPLOMOVÉ PRÁCE**

Bc. CHALUPA, M. *Výpočet hrázových dveří*. Ostrava: katedra pružnosti a pevnosti, Fakulta strojní VŠB – Technická univerzita Ostrava, 2011, 107 str. Diplomová práce, vedoucí práce Ing. Fusek M., Ph.D.

Diplomová práce se zabývá kontrolním výpočtem bezpečnostních hrázových dveří, které se používají v hlubinných dolech jako ochrana před výbuchem. V úvodu práce je probírána problematika rychlých dějů a rázů, dále pak problematika plastického chování materiálu.

Na počátku práce byla vybrána nejvíce namáhaná část dveří a na ní byl proveden analytický výpočet průhybu. Tento analytický výpočet byl následně porovnáván s numerickým řešením pomocí výpočtového programu AUTODYN. Numerickému řešení byl podroben celý model bezpečnostních hrázových dveří a výsledky numerického řešení byly následně porovnány s naměřenými daty získanými při experimentálním testování bezpečnostních hrázových dveří.

## **ANNOTATION OF MASTER THESIS**

Bc. CHALUPA, M. *Calculation of the Dam Door*. Ostrava: VŠB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Elasticity and Strength, 2011, 107 pages. Thesis leader Ing. Fusek M., Ph.D.

This thesis deals with the control calculation of the safety dam door, which is used in underground mines as protection against explosion. In the beginning, issues of material's plastic behavior. On the beginning of work, the most stressed part of the door was selected, and on it the analytical calculation of sag was done. The analytical calculation was then compared with numerical solutions using the computation program AUTODYN. Numerical solution was subjected to the safety dam door model, and the results of numerical solution were then compared with measured data obtained in experimental testing of the safety dam door.



# **OBSAH DIPLOMOVÉ PRÁCE:**

Seznam použitého značení.....	13
1. Úvod.....	17
2. Teoretická část .....	18
2.1 Rychlé děje – rázy .....	18
2.1.1 Newtonova elementární teorie rázu .....	19
2.1.2 Hertzova teorie dotyku.....	33
2.1.3 Vlnová teorie rázu.....	37
2.2 Plasticita .....	44
2.2.1 Tahová zkouška a aproximace tahového diagramu .....	45
2.2.2 Materiálové modely .....	55
2.3 Numerické metody .....	58
3. Praktická část .....	62
3.1 Analytický výpočet .....	62
3.1.1 Průhyb podle teorie koeficientu rázu .....	63
3.1.2 Průhyb podle teorie pro příčný ráz při ohybu nosníku .....	69
3.2 Numerické řešení pomocí MKP .....	86
3.2.1 Geometrický model.....	86
3.2.2 Materiálové vlastnosti.....	86
3.2.3 Konečnoprvkový (FEM) model.....	91
3.2.4 Okrajové a počáteční podmínky a nastavení výpočtu .....	92
3.2.5 Výsledky numerického řešení.....	95
3.3 Experimentální měření .....	99
3.4 Porovnání výsledků.....	100

4.	Závěrečné zhodnocení .....	102
5.	Seznam použitých pramenů .....	104
6.	Poděkování.....	107

## Seznam použitého značení

Symbol	Popis	Jednotka
$A$	Tažnost materiálu	%
$C$	Matice tlumení	$\text{N s m}^{-1}$
$C_1, C_2$	Integrační konstanty	-
$E$	Modul pružnosti v tahu	MPa
$E_k$	Kinetická energie	J
$E_p$	Potenciální energie (deformační)	J
$E_z$	Plastický modul zpevnění	MPa
$F$	Síla	N
$F_D$	Maximální síla	N
$F^{ext}$	Vektor externích sil	N
$F^{int}$	Vektor interních sil	N
$F_p$	Síla, při které vzniká plastická deformace	N
$F_r$	Rázová síla	N
$F^{residual}$	Rozdíl vektorů externích a interních sil	N
$G$	Modul pružnosti ve smyku	MPa
$H$	Materiálová konstanta tvrdosti podle Brinella	HB
$I_R$	Rázový impuls síly	$\text{N s}$
$J$	Kvadratický moment průřezu	$\text{mm}^4$
$K$	Matice tuhosti	$\text{N mm}^{-1}$
$KV$	Nárazová práce při 20°C	J
$L$	Délka nosníku	mm
$M$	Matice hmotnosti	kg
$S$	Plocha průřezu	$\text{mm}^2$
$S_0$	Původní plocha průřezu	$\text{mm}^2$
$S_{Ty}$	Moment setrvačnosti plochy	$\text{mm}^3$
$R$	Koeficient restituce	-
$R_e$	Smluvní mez kluzu	MPa

$R_m$	Smluvní mez pevnosti	MPa
$T$	Teplota	K
$T_i$	Poloha těžiště	mm
$a$	Zrychlení	mm s <sup>-2</sup>
$a_{nI}, a_{nII}$	Koeficienty pro výpočet	-
$b$	Šířka nosníku	mm
$b_{nI}, b_{nII}$	Koeficienty pro výpočet	-
$c_{nI}, c_{nII}$	Koeficienty pro výpočet	-
$d$	Průměr	mm
$d_0$	Počáteční průměr tyče	mm
$d_{nI}, d_{nII}$	Koeficienty pro výpočet	-
$e$	Přirozené prodloužení	-
$e_{nI}, e_{nII}$	Koeficienty pro výpočet	-
$f(z)$	Funkce zahrnující vliv smykové deformace	-
$k$	Tuhost	N mm <sup>-1</sup>
$k_{dyn}$	Koeficient rázu	-
$k_f$	Bezrozměrný koeficient funkce tvaru	-
$k_o$	Ohybová tuhost nosníku	N mm <sup>-1</sup>
$l$	Délka	mm
$l_0$	Původní délka	mm
$m$	Hmotnost	kg
$m_{red}$	Redukovaná hmotnost	kg
$n$	Pořadový index	-
$p$	Tlak	MPa
$q$	Spojitě zatížení	N/mm
$r$	Poloměr styčné kruhové plochy	mm
$r_{kB}$	Poloměr kuličky u zkoušky podle Brinella	mm
$r_1, r_2$	Poloměry oskulačních kružnic	mm
$t$	Čas	s

$t_1, t_2$	Čas jednotlivých etap rázu	s
$u$	Posun bodu	mm
$v$	Rychlost	mm s <sup>-1</sup>
$v_s$	Střední rychlost	mm s <sup>-1</sup>
$v_{rel}$	Relativní rychlost těsně po nárazu	mm s <sup>-1</sup>
$v_0$	Počáteční rychlost (dopadová)	mm s <sup>-1</sup>
$v_{0rel}$	Relativní rychlost těsně před nárazem	mm s <sup>-1</sup>
$v_1, v_2$	Rychlost těles těsně po nárazu	mm s <sup>-1</sup>
$v_{10}, v_{20}$	Rychlost těles těsně před nárazem	mm s <sup>-1</sup>
$w$	Posun bodu (průhyb)	mm
$w_{dyn}$	Průhyb způsobený dynamickým nárazem	mm
$x$	Přiblížení těles (souřadnice)	mm
$x_e$	Přiblížení těles v elastické oblasti	mm
$x_p$	Přiblížení těles v plastické oblasti	mm
$x_1, x_2$	Poloha těles	mm
$z$	Souřadnice	mm
$\Phi$	Úhel natočení	rad
$\alpha$	Koeficient	-
$\beta$	Konstanta pro implicitní řešení	-
$\gamma$	Konstanta pro implicitní řešení	-
$\delta$	Průhyb (stlačení pružiny)	mm
$\delta_{max}$	Maximální průhyb nosníku	mm
$\delta_{stat}$	Statický průhyb nosníku	mm
$\varepsilon$	Poměrné prodloužení	-
$\varepsilon_{cel}$	Celkové poměrné prodloužení	-
$\varepsilon_e$	Poměrné prodloužení v elastické oblasti	-
$\varepsilon_p$	Poměrné prodloužení v plastické oblasti	-
$\dot{\varepsilon}_{pl}$	Rychlost plastické deformace	-
$\bar{\varepsilon}$	Skutečné poměrné prodloužení	-

$\eta$	Mechanická účinnost pružného systému	-
$\vartheta$	Střední úhel	rad
$\vartheta_1, \vartheta_2$	Průnikové konstanty	1/MPa
$\lambda$	Štíhlost nosníku	-
$\mu$	Poissonova konstanta	-
$\varpi$	Vlastní úhlová frekvence kmitání	rad s <sup>-1</sup>
$\omega_0$	První vlastní uhlová frekvence	rad s <sup>-1</sup>
$\rho$	Hustota materiálu	Kg/mm <sup>3</sup>
$\sigma_E$	Mez pružnosti materiálu	MPa
$\sigma_k$	Mez kluzu materiálu	MPa
$\sigma_p$	Mez pevnosti materiálu	MPa
$\sigma_x$	Napětí v bodě P	MPa
$\overline{\sigma_p}$	Skutečná mez pevnosti materiálu	MPa
$\sigma_t$	Napětí v tahu	MPa
$\overline{\sigma_t}$	Skutečné napětí v tahu	MPa
$\sigma_U$	Mez úměrnosti materiálu	MPa
$\tau$	Celkový čas rázu	s
$\tau_{xz}$	Smykové napětí	MPa
$\psi$	Poměrné zúžení	-
$\psi_p$	Poměrné zúžení na mezi pevnosti	-
$\chi$	Úhel natočení	rad
$\Delta l$	Prodloužení tyče (posunutí)	mm
$\Delta t$	Velikost časového kroku	s



## 1. Úvod

Člověk se už od pradávna snaží využívat k životu různé nástroje, na jejichž výrobu je potřeba využít širokou škálu materiálů. Tyto materiály se buď přímo těží, nebo se na jejich výrobu využívá nerostného bohatství naší planety. Těžbou těchto surovin se zabývá oblast těžebního průmyslu. Člověk se v této oblasti stále snaží zdokonalovat tak, aby práce stála co nejméně a zisky byly co největší. Proto dochází k rozvoji nových technologií, ale nezapomíná se ani na bezpečnost. Přestože hlubinná těžba u nás v posledních letech stagnuje a spíše klesá, tak všechny velké společnosti se snaží zvyšovat bezpečnost při práci v dole a investují do jejího zlepšení značné finanční prostředky. Ať už se jedná o maličkosti v podobě pohodlnějších pracovních oděvů s reflexními prvky, nové typy přileb a svítidel, přes dokonalejší bezpečnostní čidla a odvětrávání dolů až po samotnou stavbu dolů v podobě dokonalejších výztuh a bezpečnostních hrázových dveří.

Oblastí bezpečnosti se také zabývá Báňský úřad České republiky, který v této souvislosti vydal několik norem a předpisů. Těmito předpisy se musí všechny podniky řídit. Jedná se např. o vyhlášku Báňského úřadu č.22/1989 Sb., č.61/1988 Sb. a č.282/2007 Sb. Účelem všech těchto vyhlášek a zákonů je zajistit ochranu majetku a lidského zdraví při práci v dole. Jedním z bezpečnostních prvků jsou i bezpečnostní hrázové dveře, jejichž kontrolou se zabývá tato diplomová práce.

Hrázové dveře jsou hornickým zařízením určeným k rychlému uzavření prostor. Běžně jsou zajištěny v otevřené poloze tak, aby mohlo docházet k volnému pohybu osob, důlních vozíků nebo dopravních pásů. V případě výbuchu se tyto dveře samočinně uzavrou a vytvoří tak výbuchovzdornou izolaci, která zadrží tlakovou vlnu výbuchu a to až do výše 1 MPa. V současné době se budují hrázové dveře jednokřídlé nebo dvoukřídlé. Skládají se z několika částí: rámu, membrán a z dveřního rámu. Dveře samotné můžou být vyrobeny ze dřeva, litiny nebo oceli a to buď jako rovné nebo vypouklé.

V teoretické části této diplomové práce se budeme zabývat problematikou řešení hrázových dveří. Budeme se převážně tedy zabývat oblastí rychlých dějů (rázů) a plastického chování materiálu.

V praktické části pak provedeme výpočet průhybu hrázových dveří a jejich částí a to jak analyticky tak numericky pomocí MKP analýzy. Všechny výsledky budou nakonec porovnány s hodnotami získanými experimentem a bude tak ověřena platnost použitých výpočtů.

## 2. Teoretická část

Bezpečnostní hrázové dveře jsou při výbuchu vystaveny velkému, velmi rychlému dynamickému zatížení, proto se na začátku této kapitoly budeme podrobně zabývat teorií rychlých dějů, kterou následně využijeme při analytickém řešení průhybu nosníku. Dále se budeme zabývat oblastí plastického chování materiálu a numerickými metodami, které budou použity při numerickém řešení daného problému.

### 2.1 Rychlé děje – rázy

Už více než tři stoletím se lidé zabývají teorií přenosu sil v tělesech a rázy, ale i přesto nejsou všechny problémy této tematiky vyřešeny. Způsobuje to hlavně neobyčejná složitost tohoto jevu. V průběhu tohoto vývoje se objevily tři teorie, které se vzájemně překrývají. Jedná se o:

- a) stereostatickou teorii rázu (Newtonova elementární teorie rázu)
- b) vlnovou teorii šíření napětí (vlnová teorie rázu)
- c) Hertzovou teorii (kvasistatická teorie).

Ráz vzniká při kontaktu dvou a více těles, jejichž vektory rychlosti jsou různé. Při studiu rázu těchto těles většinou uvažujeme, že dochází pouze ke kontaktu povrchu daných těles a neuvažujeme tak silová pole působící mezi tělesy na dálku. Jedinou výjimkou jsou mikroskopické částice, kde z důvodů rozměrů, nelze tato působení zanedbat. Z hlediska kinematiky je výsledkem nárazu dvou a více těles náhlá změna rychlosti těchto těles. Tento jev je doprovázen přeměnou části kinetické energie na energii potenciální (deformační). Vlivem rázových sil poté dochází v místě styku těles k nárůstu lokálního napětí, které může vyvolat u těchto těles lokální plastickou deformaci. Tento jev je proto nutné zahrnout do řešení s ohledem na bezpečnost konstrukcí.

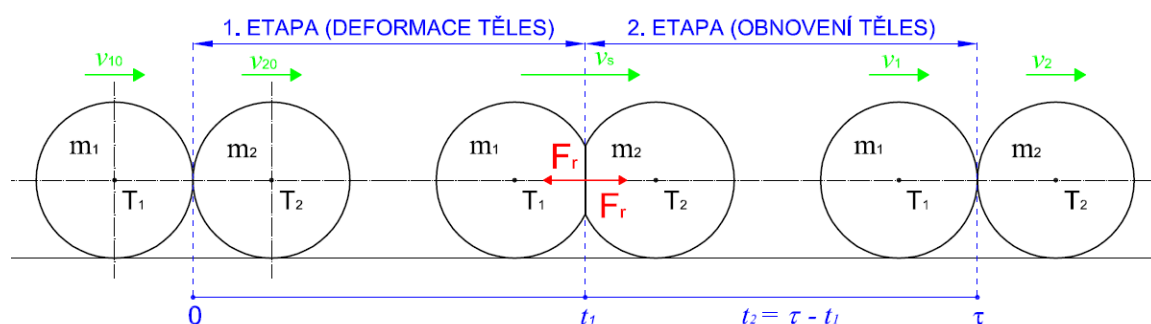
Úplně na začátku pokusů o řešení rázu se vycházelo ze dvou teorií. První teorie uvažovala pouze globální deformace a napětí a lokální hodnoty napětí a deformace zanedbávala. Druhá teorie naopak upřednostňuje lokální deformace a napětí před globálními. Na základě zkušeností z praxe se ale ukázalo, že předpoklady obou těchto teorií jsou mylné a že je potřeba současně zahrnout do výpočtu jak lokální tak i globální

deformace a napětí. Tyto poznatky shrnul a obě teorie tak spojil Newton ve své Elementární teorii rázu.

### 2.1.1 Newtonova elementární teorie rázu

Předpokladem této teorie je přímý, centrální ráz, jehož délka trvání je zanedbatelně krátká vzhledem k vlastním kmitům soustavy. Díky tomuto předpokladu nachází Newtonova elementární teorie rázu široké uplatnění v technické praxi. Většina příkladů z technické praxe buď tyto požadavky už splňuje, nebo případné nedokonalosti lze eliminovat vhodnou konstrukcí vedení narážejících těles. Rovněž další předpoklad konstantního koeficientu restituce ( $R$ ) je splněný pro úzký rozsah rázových rychlostí. Hodnotu koeficientu restituce je potřeba určit pro konkrétní případ a to buď pomocí hypotéz, nebo odhadnout pomocí výsledku experimentu. O koeficientu restituce se zmíníme později v této kapitole.

Předpokládejme nyní případ dvou koulí o hmotnostech  $m_1$  a  $m_2$ , jenž se pohybují po přímce rychlostmi těsně před nárazem  $v_{10}$  a  $v_{20}$ . Průběh rázu těchto dvou těles pak rozdělíme do dvou etap, jak je vidět na obrázku (Obr. 2.1.1).



Obr. 2.1.1 – Průběh rázu dvou koulí

**První etapa rázu (deformace těles):** Začíná při dotyku dvou a více těles a končí v okamžiku jejich maximální deformace. V této etapě dochází k poklesu kinetické energie a její přeměně na energii potenciální (deformační). Výsledkem je, že na konci této etapy v čase  $t_1$  jsou tělesa maximálně zdeformována a mají stejnou hodnotu rychlosti  $v_s$ . Tato rychlost se shoduje s rychlostí těžiště soustavy narážejících těles a pokud dojde k dokonale plastickému rázu i s rychlostí výslednou.

Tuto rychlost lze určit podle vztahu

$$v_s = \frac{m_1 \cdot v_{10} + m_2 \cdot v_{20}}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \quad (2.1.1)$$

kde

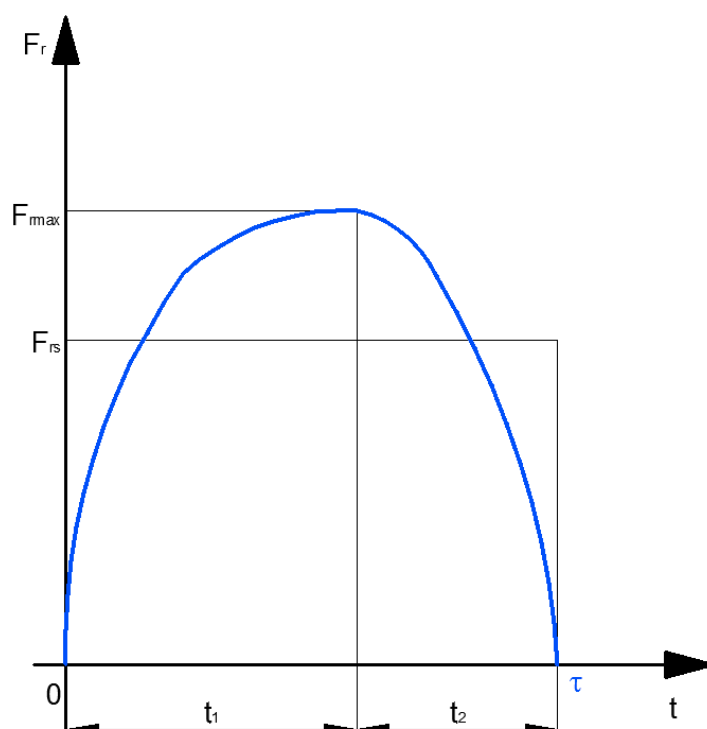
$m_1, m_2$	jsou hmotnosti jednotlivých těles,
$v_{10}, v_{20}$	jsou rychlosti jednotlivých těles před rázem,
$v_1, v_2$	jsou rychlosti jednotlivých těles po rázu.
$v_s$	Rychlost těles na konci první etapy

**Druhá etapa rázu (obnovení těles):** Začíná na konci první etapy, tedy při maximální deformaci těles a končí, když se tělesa od sebe oddělí. V této etapě dochází naopak k přeměně potenciální (deformační) energie na energii kinetickou. Výsledkem je, že na konci této etapy se v oblasti pružných deformací tělesům obnoví jejich původní tvar. Pokud dojde k plastickým deformacím, tak bude obnovení tvaru pouze částečné. Dále se na konci této etapy tělesa oddělí a budou pokračovat každá svou rychlostí.

Budeme-li uvažovat, že dochází k rázu dvou pružných těles, tak z tohoto důvodu se nám bude v průběhu rázu měnit styková plocha těles. V této dotykové ploše dojde ke spojitému zatížení, jehož výsledkem je rázová síla  $F_r$ , jejíž nositelkou je tzv. rázová normála. Velikost této síly se nám mění s velikostí rázové plochy od nulové hodnoty na začátku rázu, přes maximální hodnotu na konci první etapy rázu, až zase po nulovou hodnotu na konci rázu. Průběh rázové síly je znázorněn na obrázku (Obr. 2.1.2). Velikost dynamického účinku takto vzniklé rázové síly vyjadřujeme pomocí impulzu rázové síly  $I_R$ , který lze zapsat podle vzorce

$$I_R = \int_0^{\tau} F_r \cdot dt = \int_0^{t_1} F_r \cdot dt + \int_{t_1}^{\tau} F_r \cdot dt = I_{R1} + I_{R2} \quad (2.1.2)$$

kde	$F_r$	je rázová síla působící na tělesa,
	$t_1, t_2$	čas trvání 1. a 2. etapy rázu,
	$\tau$	celkový čas trvání rázu,
	$I_{R1}, I_{R2}$	impulzy rázové síly v jednotlivých etapách.



**Obr. 2.1.2 – Časový průběh rázové síly  $F_r$**

Jak je patrné z rovnice (2.1.2), tak rázový impuls  $I_R$  lze rozdělit na rázový impuls v první etapě  $I_{R1}$  a rázový impuls v druhé etapě  $I_{R2}$ . Tyto dílčí rázové impulsy pak lze určit z integrálů pomocí rovnic (2.1.3) a (2.1.5).

$$I_{R1} = \int_0^{t_1} F_r \cdot dt = m_1 \cdot (v_{10} - v_s) = m_2 \cdot (v_s - v_{20}) \quad (2.1.3)$$

Tento vztah (2.1.3) lze po dosazení střední rychlosti ze vztahu (2.1.1) a úpravách přepsat na vztah

$$I_{R1} = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot (v_{10} - v_{20}) = m_{red} \cdot v_{0rel} \quad (2.1.4)$$

kde

$$m_{red} \quad \text{je redukovaná hmotnost těles } m_{red} = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2},$$

Rázový impuls v druhé etapě je popsán rovnicí

$$I_{R2} = \int_{t_1}^{t_2} F_r \cdot dt = m_1 \cdot (v_s - v_1) = m_2 \cdot (v_2 - v_s) \quad (2.1.5)$$

Po dosazení za střední rychlost ze vztahu (2.1.1) dostaneme vztah:

$$I_{R2} = -\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot (v_1 - v_2) = m_{red} \cdot v_{rel} \quad (2.1.6)$$

Podíl impulsu rázové síly v druhé etapě  $I_{R2}$  spočteného podle vztahu (2.1.6) k impulsu rázové síly v první etapě  $I_{R1}$  ze vztahu (2.1.4) nám potom dá koeficient restituce  $R$ . Tímto koeficientem, který zavedl Newton vyjadřujeme skutečnost, že v praxi dochází k rázům těles rozdílných materiálových vlastností a tedy i rozdílného pružného chování. Tento podíl lze po úpravě převést na záporně vzatý podíl relativní rychlosti těles těsně po rázu k relativní rychlosti těles těsně před rázem (2.1.7).

$$R = \frac{I_{R2}}{I_{R1}} = \frac{v_s - v_1}{v_{10} - v_s} = \frac{v_2 - v_s}{v_s - v_{20}} = -\frac{v_{rel}}{v_{0rel}} \quad (2.1.7)$$

Pomocí rovnic (2.1.1) a (2.1.7) lze určit rychlosti těles těsně po rázu v závislosti na rychlosti těles těsně před rázem, hmotnosti těles a koeficientu restituce.

$$v_1 = \frac{1}{m_1 + m_2} \cdot [m_1 \cdot v_{10} + m_2 \cdot v_{20} - m_2 \cdot \varepsilon \cdot (v_{10} - v_{20})] \quad (2.1.8)$$

$$v_2 = \frac{1}{m_1 + m_2} \cdot [m_1 \cdot v_{10} + m_2 \cdot v_{20} + m_1 \cdot \varepsilon \cdot (v_{10} - v_{20})] \quad (2.1.9)$$

Dalšími velmi důležitými vztahy jsou energetické vztahy pro výpočet energie, která se ztratí při rázu. V průběhu rázu totiž dochází ke změně kinetické energie. Tuto změnu (ztrátu energie) lze pro první (deformační) etapu rázu určit podle vztahu

$$E_{k1} = \frac{1}{2} \cdot [m_1 \cdot v_{10}^2 + m_2 \cdot v_{20}^2 - (m_1 + m_2) \cdot v_s^2] = \frac{1}{2} \cdot m_{red} \cdot v_{0rel}^2 \quad (2.1.10)$$

Obdobně určíme pro druhou etapu (restituce) přírůstek kinetické energie.

$$E_{k2} = \frac{1}{2} \cdot [m_1 \cdot v_1^2 + m_2 \cdot v_2^2 - (m_1 + m_2) \cdot v_s^2] = \frac{1}{2} \cdot m_{red} \cdot R^2 \cdot v_{0rel}^2 \quad (2.1.11)$$

Rozdílem kinetické energie v první (deformační) etapě rázu a kinetickou energií v druhé etapě rázu (restituce) lze určit celkovou změnu kinetické energie. Tuto změnu lze po dosazení z rovnic (2.1.10) a (2.1.11) a patřičných úpravách psát jako

$$E_k = E_{k1} - E_{k2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot (1 - R^2) \cdot (v_{10} - v_{20})^2 = \frac{m_{red}}{2} \cdot (1 - R^2) \cdot v_{0rel}^2 \quad (2.1.12)$$

Dále lze ještě určit pomocí rovnic (2.1.10) a (2.1.11) mechanickou účinnost pružného systému, kterou lze využít pro určení koeficientu restituce  $R$  pomocí experimentu.

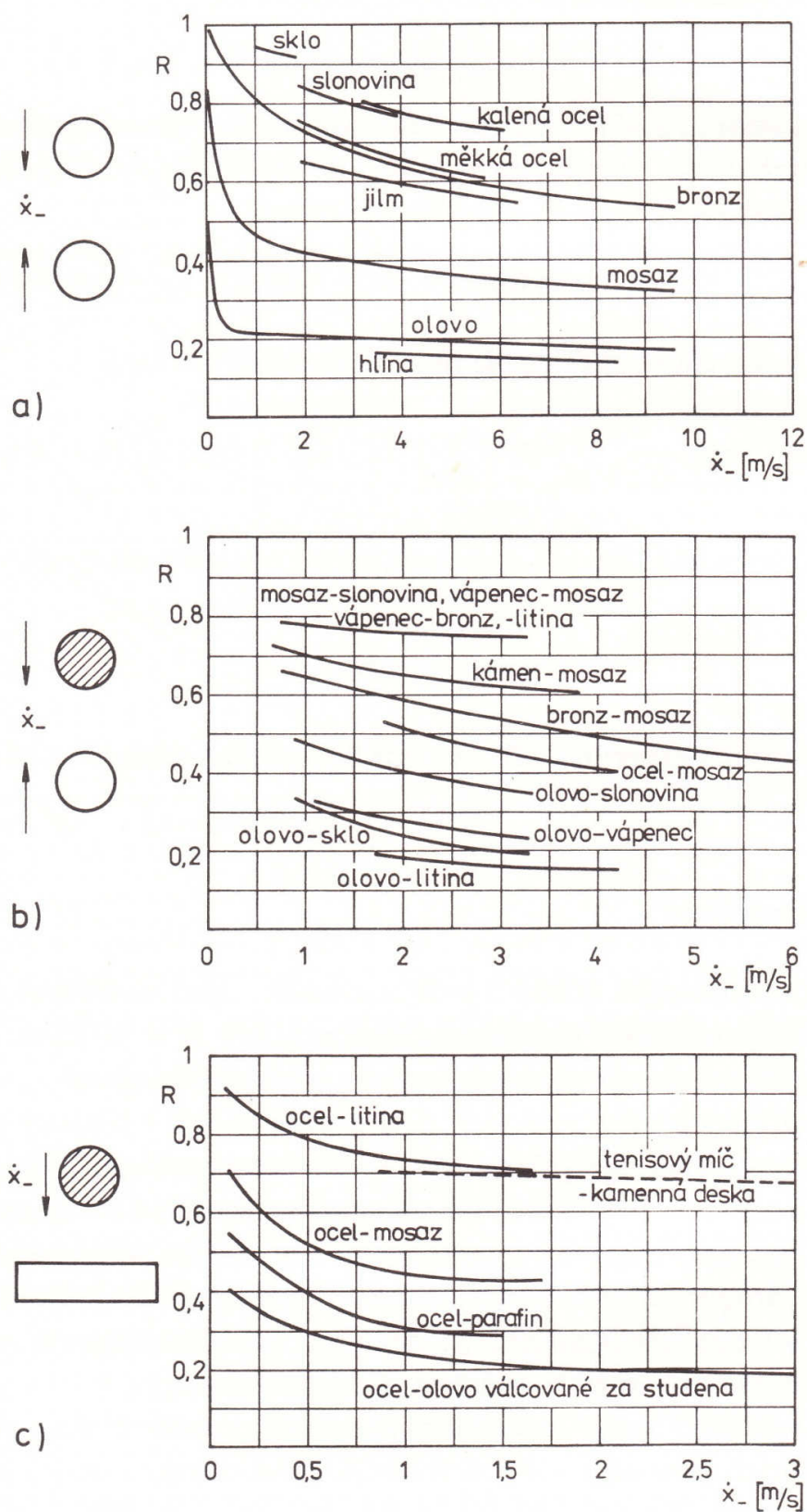
$$\eta = \frac{E_{k2}}{E_{k1}} = R^2 \quad (2.1.13)$$

### **2.1.1.1 Koeficient restituce $R$**

Newton v souvislosti se svou Newtonovou elementární teorií rázu zavedl pojem koeficient restituce  $R$ . Tento koeficient restituce  $R$  je určen rovnicí (2.1.7). Tato veličina nám popisuje výsledek složitých dějů v tělesech při rázu pomocí jednoduchého poměru relativní rychlosti těles těsně po rázu  $v_{rel}$  a těsně před rázem  $v_{0rel}$ . V průběhu rázu dochází nejen ke změně kinetické energie (2.1.12), ale i k složitým dynamickým dějům. Tyto děje vznikají v souvislosti s konečnou rychlostí šíření napětových vln v tělesech při rázu. Jedná se zejména o to, kdy si jednotlivé elementy objemu těles vzájemně předávají kinetickou i potenciální energii. Tímto v tělesech vznikají škodlivé odrazy napětových vln od povrchu jednotlivých těles. V rovnici (2.1.12) pro výpočet kinetické energie jsou zahrnuty nejen ztráty kinetické energie vzniklé v průběhu rázu, ale i energie vlnění, které ještě v tělesech zbývá v okamžiku oddělení těles po rázu (tedy na konci druhé etapy rázu).

Ze zjištěných poznatků pak vyplývá, že hledaný koeficient restituce  $R$  je závislý nejen na materiálu do sebe narážejících těles, ale i na jejich tvaru a absolutní velikosti. Dále pak třeba také na stupni rázové deformace, rychlosti těles těsně před rázem, vazbách s okolím atd. Z těchto důvodů bude koeficient restituce  $R$  pro každý případ jiný. Tato závislost je

popsána hodnotami získanými experimentem na obrázku (Obr. 2.1.3), který byl převzat s literatury [5 str. 28]. Na obrázku  $\dot{x}_-$  znamená rychlost tělesa těsně před nárazem  $v_{10}$ .



Obr. 2.1.3 – Závislost koeficientu restituce na rychlosti před rázem



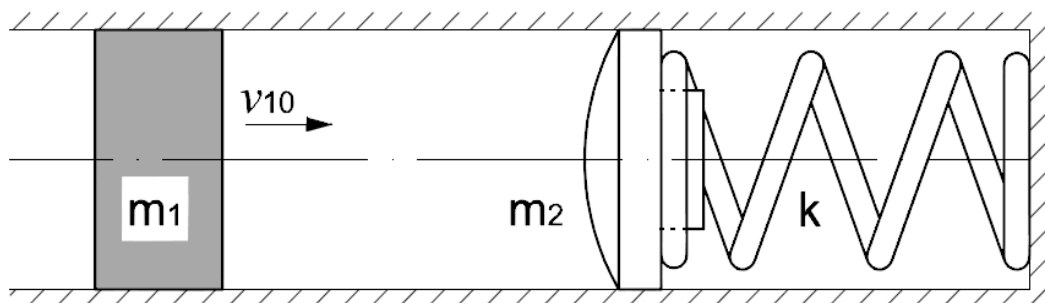
Na obrázku (Obr. 2.1.3) v části (a) je vidět různé koeficienty restituce  $R$  pro případ stejně velkých koulí vyrobených ze stejného materiálu, ale pro různou relativní rychlost těsně před rázem  $v_{0rel}$ . V části (b) je pak uveden případ dvou koulí stejných rozměrů, ale vyrobených z různých materiálů pro různé relativní rychlosti těsně před rázem  $v_{0rel}$ . V poslední části obrázku (Obr. 2.1.3) část (c) je uveden případ rázu ocelové koule o průměru 25,4 mm na masivní desku z odlišného materiálu, než je koule.

Z uvedeného obrázku (Obr. 2.1.3) je vidět, že při nízkých relativních rychlostech těsně před rázem  $v_{0rel}$  se koeficient restituce přibližně rovná  $R = 1$ . Tato skutečnost vyplývá z předpokladu, že při nízkých rázových rychlostech při rázu dochází pouze k vazkopružným deformacím daných těles. Naopak při vyšších relativních rychlostech těsně před rázem  $v_{0rel}$  dochází u koeficientu restituce  $R$  nejprve k prudkému poklesu a pak k následnému ustálení takřka na stejné hodnotě.

Podle velikosti součinitele restituce  $R$  lze ráz rozdělit z hlediska dynamiky na tři případy:

- a) dokonale plastický ráz ( $R = 0$ )
- b) dokonale pružný ráz ( $R = 1$ )
- c) nedokonale pružný ráz ( $0 < R < 1$ )

První dva případy (dokonale plastický a dokonale pružný ráz) jsou pouze teoretické případy a v praxi se nevyskytují. Reálné rázy jsou tedy vždy nedokonale pružné. Rozdíly při řešení těchto tří případů si ukážeme na příkladě, kdy dojde k nárazu osamělé hmoty na pružnou soustavu. Tento příklad je vykreslen na obrázku (2.1.4).



**Obr. 2.1.4 – Náraz osamělé hmoty do pružné soustavy**

Jedná se o případ, kdy osamělá hmota hmotnosti  $m_1$  narazí do pružné soustavy, která má vlastní hmotnost  $m_2$  a tuhost  $k$ . Budeme uvažovat, že nárazník i osamělá hmota se pohybují ve vedení, proto jejich rázové normály leží na jedné ose. Dojde tak tedy k přímému centrálnímu rázu. V takto uvažovaném případě dojde ke dvěma druhům deformace. První deformace je stlačení pružiny a druhá deformace je lokální v místě kontaktu nárazníku a tělesa. Příklad řešíme jako kontaktní úlohu, tedy výsledkem řešení je konstantní napětí mezi tělesem a nárazníkem. V první části řešení řešíme pouze deformaci pružiny. Charakter kontaktního působení daných těles vyjádříme pomocí součinitele restituace  $R$  definovaným podle rovnice (2.1.7).

### **Dokonale plastický ráz ( $R = 0$ )**

Budeme se zabývat případem uvedeným na obrázku (Obr. 2.1.4). Nejprve je nutné provést rozbor silových a deformačních poměrů soustavy. Bavíme-li se o dokonale plastickém rázu ( $R = 0$ ), pak v momentě nárazu tělesa o hmotnosti  $m_1$  do nárazníku o hmotnosti  $m_2$  dojde k sjednocení rychlostí obou těles. Z platnosti podmínky  $v_1 = v_2$  a pokud vyjdeme ze vztahů (2.1.8) a (2.1.9), tak musíme pro výpočet rychlosti těsně po ráze dostat vztah

$$v_1 = v_2 = \frac{v_{10} \cdot m_1 - v_{20} \cdot m_2}{m_1 + m_2} \quad (2.1.14)$$

Pro případ kdy bude počáteční rychlost nárazníku  $v_{20} = 0$  nám vztah (2.1.14) přejde na vztah

$$v_1 = v_2 = \frac{v_{10} \cdot m_1}{m_1 + m_2} \quad (2.1.15)$$

Protože se ale jedná i o případ, kdy dochází k volnému kmitání hmoty ( $m_1 + m_2$ ) na pružině, tak si můžeme určit i vlastní úhlovou frekvenci daného kmitání podle vztahu

$$\omega_{10} = \sqrt{\frac{k}{m_1 + m_2}} \quad (2.1.16)$$

Ze vztahu (2.1.17) lze poté určit polohu hmoty a nárazníku a ze vztahu (2.1.18) pak i maximální stlačení pružiny.

$$x(t) = \frac{v_1}{\omega_0} \cdot \sin(\omega_{10} \cdot t) \quad (2.1.17)$$

$$\delta = \frac{v_1}{\omega_{10}} = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{km}}{k \cdot \left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)}} \quad (2.1.18)$$

kde

$$E_{km} \quad \text{je kinetická energie tělesa } E_{km} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_{10}^2.$$

Maximální rázová síla vzniklá nárazem se poté určí podle vztahu

$$F_{r\_max} = k \cdot \delta = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot E_{km}}{1 + \frac{m_2}{m_1}}} \quad (2.1.19)$$

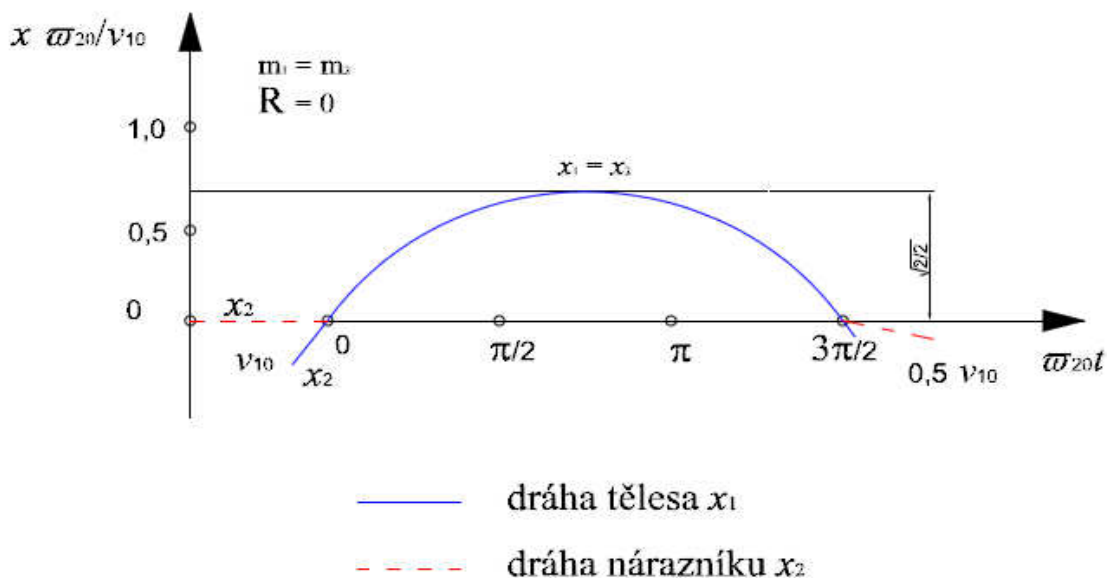
Odraz hmoty od nárazníku nastane v čase  $\tau$ , který se určí podle rovnice (2.1.20). Rychlost tělesa při odraze  $v_1$  pak podle vztahu (2.1.21).

$$\tau = \frac{\pi}{\omega_{10}} \quad (2.1.20)$$

$$v_1 = \left. \frac{dx}{dt} \right|_{t=\tau} = -v_2 = -\frac{v_{10}}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \quad (2.1.21)$$

Z rovnice (2.1.21) vyplývá, že rychlost tělesa při odraze bude nižší než při dopadu tělesa na nárazník. Budeme-li nyní uvažovat případ, kdy je hmotnost tělesa i nárazníku rovna ( $m_1 = m_2$ ), tak si pro dokonale plastický ráz ( $R = 0$ ) můžeme vykreslit časový průběh dráhy tělesa  $x_1$  a dráhy nárazníku  $x_2$ . Tento průběh je vykreslen na obrázku (Obr. 2.1.5). Vlastní úhlovou frekvenci kmitání nárazníku na pružině  $\omega_{20}$  si pak lze určit podle vztahu

$$\omega_{20} = \sqrt{\frac{k}{m_2}} \quad (2.1.22)$$



Obr. 2.1.5 – časový průběhy drah těles pro dokonale plastický ráz

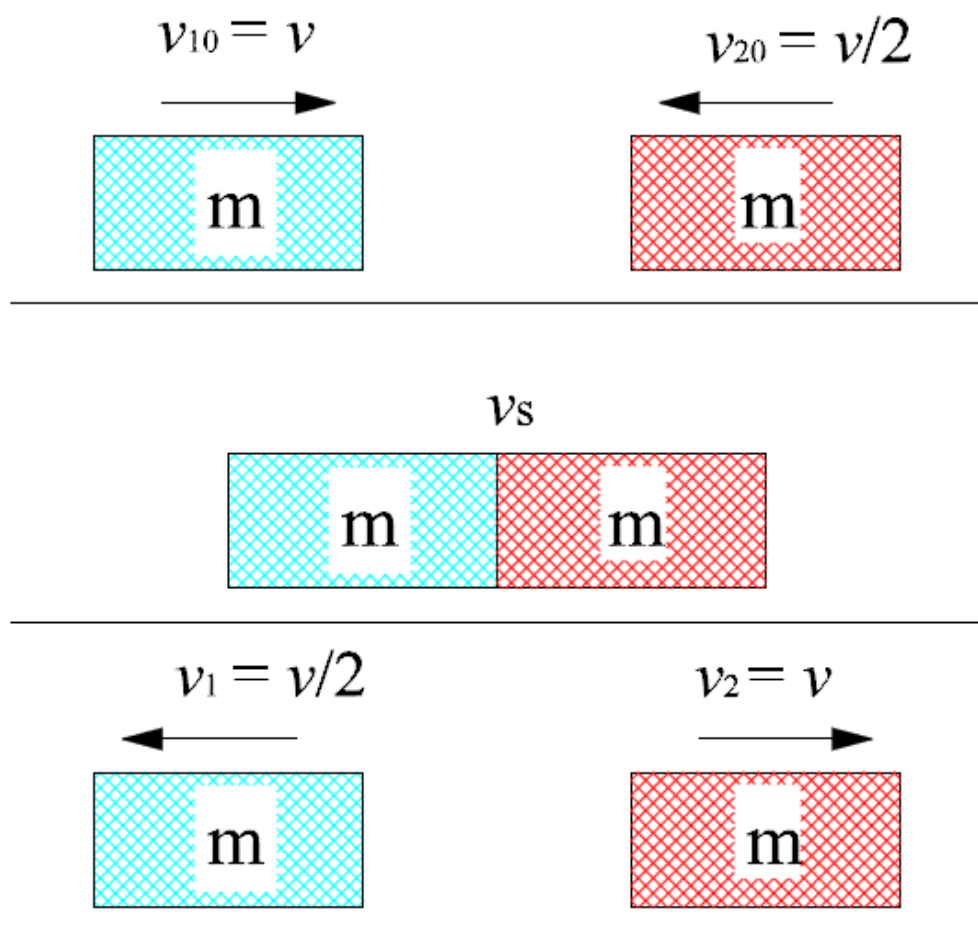
### Dokonale pružný ráz ( $R = 1$ )

Opět vyjdeme z obrázku (Obr. 2.1.4) a provedeného rozboru silově deformačních poměrů soustavy. Nyní ale budeme uvažovat dokonale pružný ráz těles ( $R = 1$ ). Dále budeme předpokládat, že hmotnost tělesa  $m_1$  a hmotnost nárazníku  $m_2$  splňují podmínku rovnosti ( $m_1 = m_2$ ) a tuhost pružného členu bude  $k$ . Vyjdeme-li nyní z rovnic (2.1.8) a (2.1.9), tak dostaneme podmínku pro dokonale pružný ráz ( $R = 1$ ) v podobě rovnic (2.1.23) pro těleso a (2.1.24) pro nárazník.

$$v_1 = v_{20} \quad (2.1.23)$$

$$v_2 = v_{10} \quad (2.1.24)$$

Z rovnice (2.1.23) vyplývá, že rychlost tělesa těsně po nárazu odpovídá rychlosti nárazníku těsně před rázem a obdobně z rovnice (2.1.24) pak dostaneme podmínku, kdy se rychlost nárazníku těsně po nárazu rovná rychlosti tělesa těsně před rázem. Tyto dvě podmínky jsou zobrazeny pro obecný případ dokonale pružného rázu ( $R = 1$ ) dvou těles jejichž hmotnosti jsou si rovny na obrázku (Obr. 2.1.6).



Obr. 2.1.6 – obecný případ dokonale pružného rázu

Při grafickém znázornění pohybu tělesa a nárazníku na obrázku (Obr. 2.1.7) vidíme, že těleso pohybující se rychlostí  $v_{10}$  naráží do nárazníku, jehož rychlost je před nárazem rovna nule ( $v_{20} = 0$ ). Po náraze (bod A na obrázku Obr. 2.1.7) se těleso nepohybuje. Těleso má tedy nulovou rychlost a naopak nárazník začne vykonávat harmonický pohyb. Tento pohyb nám popisuje rovnice (2.1.25). Rychlost pohybu nárazníku je v tomto okamžiku rovna  $v_{2(t_1)} = -v_{10}$ .

Po uplynutí času  $t_1$ , který vypočteme podle vztahu (2.1.26) dojde k druhému nárazu tělesa a nárazníku (bod B na obrázku Obr. 2.1.7). Po tomto druhém náraze zůstane nárazník stát ( $v_2 = 0$ ) a naopak se zase začne pohybovat těleso rychlostí  $v_1 = -v_{10}$ .

Rovnice popisující harmonický pohyb mezi prvním a druhým nárazem:

$$x_2(t) = \frac{v_{10}}{\omega_{20}} \cdot \sin(\omega_{20} \cdot t) \quad (2.1.25)$$

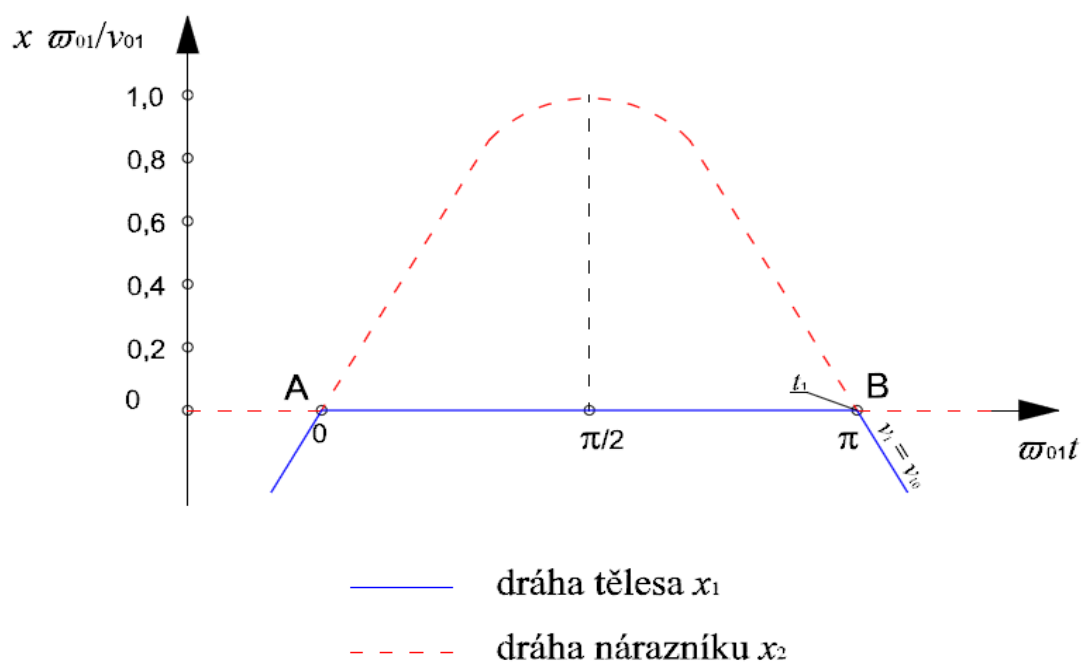
kde

$v_{10}$  je počáteční rychlost tělesa,

$\omega_{20}$  je vlastní uhlová frekvence  $\omega_{20} = \sqrt{\frac{k}{m_2}}$ .

Rovnice pro výpočet času  $t_1$ , kdy nastane druhý náraz tělesa a nárazníku

$$t_1 = \frac{\pi}{\omega_{20}} \quad (2.1.26)$$



Obr. 2.1.7 – časový průběh drah těles pro dokonale pružný ráz

### Nedokonale pružný ráz ( $0 < R < 1$ )

Provedeme rozbor silovým a deformačním poměru soustavy zobrazené na obrázku (Obr. 2.1.4). Budeme-li nyní uvažovat nedokonale pružný ráz ( $R = 0,5$ ), dále uvažujeme, že hmotnost tělesa  $m_1$  a hmotnost nárazníku  $m_2$  jsou si rovny ( $m_1 = m_2$ ) a tuhost pružného členu je  $k$ .

Protože hmotnost nárazníku a tělesa je stejná ( $m_1 = m_2$ ), tak po použití rovnic (2.1.8) a (2.1.9) dostaneme rychlost těsně po náraze pro těleso  $v_1$  z rovnice (2.1.27) a pro rychlost těsně po náraze nárazníku  $v_2$  z rovnice (2.1.28).

$$v_1 = \frac{1}{4} \cdot v_{10} + \frac{3}{4} \cdot v_{20} \quad (2.1.27)$$

$$v_2 = \frac{3}{4} \cdot v_{10} + \frac{1}{4} \cdot v_{20} \quad (2.1.28)$$

Budeme uvažovat, že pro náš případ je počáteční rychlost nárazníku nulová ( $v_{20} = 0$ ). Po dosazení do předešlých dvou rovnic (2.1.27) a (2.1.28) dostaneme výslednou rychlost těsně po nárazu

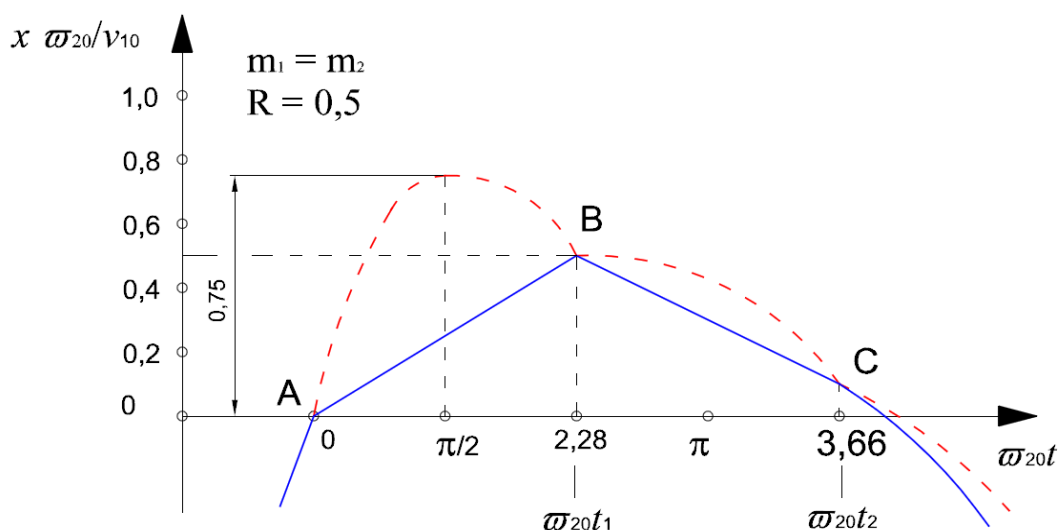
$$v_1 = \frac{1}{4} \cdot v_{10} \quad (2.1.29)$$

$$v_2 = \frac{3}{4} \cdot v_{10} \quad (2.1.30)$$

Zvýše uvedených výrazů (2.1.29) a (2.1.30) vyplývá, že se tělesa po rázu pohybují různou rychlostí samostatně a tím pádem se jejich pohybové rovnice liší. Tento pohyb je vyobrazen na obrázku (Obr. 2.1.8).

$$x_1(t) = 0,25 \cdot v_{10} \cdot t \quad (2.1.31)$$

$$x_2(t) = 0,75 \cdot \frac{v_{10}}{\omega_{20}} \cdot \sin(\omega_{20} \cdot t) \quad (2.1.32)$$



Obr. 2.1.8 – časový průběh drah těles pro nedokonale pružný ráz

Pro výpočet času  $t_1$  kdy dojde k druhému nárazu tělesa a nárazníku vyjdeme z rovnosti rovnic (2.1.31) a (2.1.32). Tomuto času získaného z rovnosti rovnic, který je zapsán jako rovnice (2.1.33) odpovídá bod B na obrázku (Obr. 2.1.8). Řešením je potom hodnota  $\omega_{20}t_1 = 2,28$ .

$$x_1(t) = x_2(t)$$

$$0,25 \cdot v_{10} \cdot t = 0,75 \cdot \frac{v_{10}}{\omega_{20}} \cdot \sin(\omega_{20} \cdot t) \quad (2.1.33)$$

Rychlost nárazníku před druhým nárazem v čase  $t_1$  (bod B na Obr. 2.1.8) se určí ze vztahu

$$v_2(t_1) = \left. \frac{dx_1(t)}{dt} \right|_{t=t_1} = 0,75 \cdot v_{10} \cdot \cos(\omega_{20} \cdot t_1) = -0,49 \cdot v_{10} \quad (2.1.34)$$

Rychlost tělesa před druhým nárazem je potom

$$v_1(t_1) = 0,25 \cdot v_{10} \quad (2.1.35)$$



Rychlosti po druhém náraze se potom dají spočítat pro těleso ze vztahu (2.1.29) a pro nárazník ze vztahu (2.1.30). Dosadíme-li za  $v_{10} = v_1(t_1)$  a za  $v_{20} = v_2(t_1)$  do vztahů (2.1.34) a (2.1.35) pak dostaneme hodnoty pro rychlost těles po druhém nárazu ve tvaru

$$v_1 = -0,306 \cdot v_{10} \quad (2.1.36)$$

$$v_2 = 0,065 \cdot v_{10}. \quad (2.1.37)$$

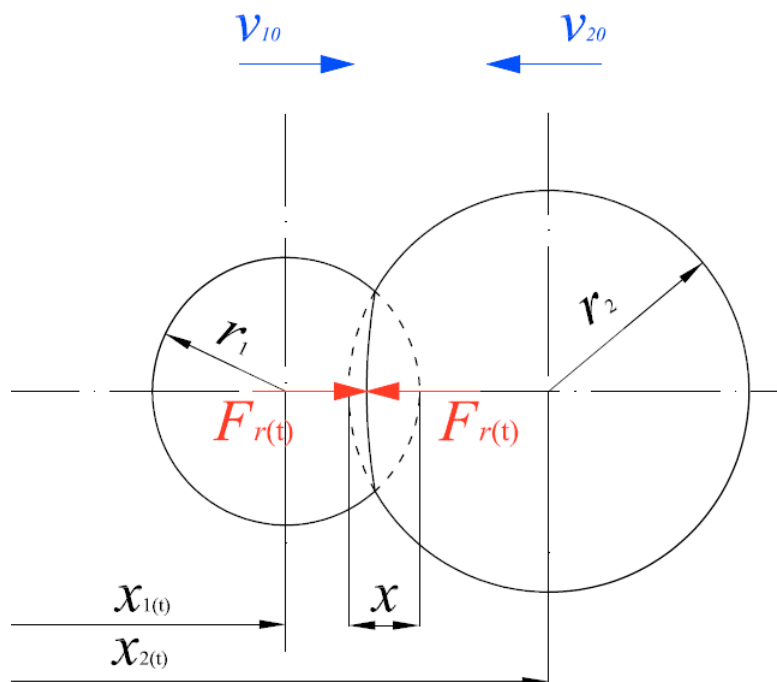
### 2.1.2 Hertzova teorie dotyku

Velký přínos pro řešení problému rychlých dějů měl německý fyzik H. Hertz. Jeho Hertzova teorie dotyku dokonale pružných těles matematicky popisuje dotyk dvou dokonale pružných těles a vyjadřuje vztah mezi deformacemi těles v místě dotyku a mechanickými napětími. Tato teorie vychází z předpokladu, že vzniklé deformace budou omezeny pouze na nejbližší okolí dotyku a dotykové plochy budeme moci nahradit paraboloidy. Budeme-li předpokládat, že daná tělesa jsou dokonale pružná, síla mezi tělesy bude v každém okamžiku rázu rovna statické síle při stejné deformaci a zároveň, že čas trvání rázu je ve srovnání s dobou potřebnou pro průběh elastických vln tělesy velký, pak lze použít tzv. Hertzovu statickou teorii přímého rázu.

Budeme tedy uvažovat, že plochy jsou rotačně symetrické vzhledem ke společné normále, která prochází bodem dotyku. Hertz dále předpokládal, že poloměry oskulačních koulí  $r_1, r_2$  povrchu těles v místě jejich dotyku jsou mnohem větší než poloměr styčné plochy  $r$ . Za tohoto předpokladu se lze omezit pouze na první přiblížení tak, že náhrada povrchu těles v okolí místa dotyku bude odpovídat rotačním paraboloidům 2. stupně. Poté lze odvodit závislost síly  $F_r$  působící mezi tělesy, vzájemným přiblížením těles  $x$  a poloměrem styčné kruhové plochy  $r$ . Na obrázku (Obr. 2.1.9) je znázorněna srážka dvou koulí pro Hertzovu teorii dotyku.

$$F_r = \frac{16}{3} \cdot r^3 \cdot \frac{r_1 + r_2}{r_1 \cdot r_2 \cdot (\vartheta_1 + \vartheta_2)} \quad (2.1.38)$$

$$x = \frac{3}{16 \cdot r} \cdot F_r \cdot (\vartheta_1 + \vartheta_2) \quad (2.1.39)$$



Obr. 2.1.9 – Hertzova teorie dotyku pro srážku dvou koulí

Z rovnic (2.1.38) a (2.1.39) lze tedy pak napsat závislosti působící síly  $F_r$  na přiblížení těles  $x$  jako

$$F_r = \frac{16}{3 \cdot (\vartheta_1 + \vartheta_2)} \cdot \sqrt{\frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}} \cdot x^{\frac{3}{2}} = k \cdot x^{\frac{3}{2}} \quad (2.1.40)$$

V rovnicích (2.1.39) a (2.1.40) jsou  $\vartheta_1$  a  $\vartheta_2$  jsou průnikové konstanty, které spočítáme ze vztahů (2.1.41) a (2.1.42).

$$\vartheta_1 = \frac{4 \cdot (1 - \mu_1^2)}{E_1} \quad (2.1.41)$$

$$\vartheta_2 = \frac{4 \cdot (1 - \mu_2^2)}{E_2} \quad (2.1.42)$$

kde

$E_1, E_2$  jsou moduly pružnosti v tahu daných těles,  
 $\mu_1, \mu_2$  jsou Poissonova čísla materiálů daných těles.

Poté můžeme odvodit diferenciální rovnici pro určení časového průběhu vzájemného přiblížení těles při ráze x.

$$m_{red} \cdot a + k \cdot x^{\frac{3}{2}} = 0 \quad (2.1.43)$$

kde

$$m_{red} \quad \text{je redukovaná hmotnost těles} \quad m_{red} = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2},$$

$$m_1 \quad \text{je hmotnost tělesa 1,}$$

$$m_2 \quad \text{je hmotnost tělesa 2.}$$

Pak můžeme psát první integrál této diferenciální rovnice (2.1.43) jako

$$v^2 = v_{0rel}^2 - \frac{4}{5} \cdot \frac{k}{m_{red}} \cdot x^{\frac{5}{2}} \quad (2.1.44)$$

Z rovnice (2.1.44) lze poté určit vztah pro maximální přiblížení  $x_{max}$ , pro které platí podmínka ( $v = 0$ ).

$$x_{max} = \left( \frac{5 \cdot m_{red} \cdot v_{0rel}^2}{4 \cdot k} \right)^{\frac{2}{5}} \quad (2.1.45)$$

Dále taky dostaneme vztah pro celkovou dobu rázu  $\tau$ .

$$\tau = 2 \cdot \int_0^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{v_{0rel}^2 - \frac{4}{5} \cdot \frac{k}{m_{red}} \cdot x^{\frac{5}{2}}}} \quad (2.1.46)$$

Hertzova teorie dotyku byla později zpřesněna dalšími autory mj. Cattaneo, Tsu – Tao Loo, kteří řešili druhé přiblížení vhodné pro větší deformace a jako náhradu použili paraboloidy 4. stupně. Tato teorie byla ověřována experimentálně a shoda teoretických a experimentálních výsledků byla velmi dobrá. Tato teorie i všechny její zpřesnění, ale vycházejí z předpokladu tzv. vazkopružných rázů a lze je tedy použít pouze u rázů, kde ještě nedochází k plastickým deformacím.

Další teorií, která už uvažovala i s plastickými deformacemi zpracovali autoři Silas, Brindeu a Hegedüs. Tito autoři použili pro popis své statické teorie rázu příklad, kdy ocelová kulička narazí do svislé stěny. Jejich teorie tedy vychází ze znalostí průběhu rázových sil  $F_r$  v závislosti na vzájemném přiblížení těles během rázu  $x$ . Autoři teorie rozdělují vzájemné přiblížení těles  $x$  na dvě složky. Složku přiblížení odpovídající elastické deformaci  $x_e$  a složku přiblížení odpovídající plastické deformaci  $x_p$ . Pro výpočet první (elastické) složky využívají Hertzovu teorii dotyku dokonale pružných těles (viz rovnice 2.1.40). Druhou (plastickou) složku přiblížení poté předpokládají přímo úměrnou rozdílu okamžité rázové síly  $F_r$  a síly při nichž začínají vznikat plastické deformace  $F_p$ .

Závislost mezi rázovými silami a deformacemi poté vyjadřují vztahem

$$x = \left(\frac{F_r}{k}\right)^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot r_{kB} \cdot H} \cdot (F_r - F_p) = \left(\frac{F_r}{k}\right)^{\frac{2}{3}} + \chi \cdot (F_r - F_p) \quad (2.1.47)$$

kde

$r_{kB}$  je poloměr kuličky,  
 $H$  je materiálová konstanta kuličky, která přibližně odpovídá tvrdosti podle Brinella.

Rázovou sílu, při které začínají vznikat plastické deformace  $F_p$  a tomu odpovídající složku přiblížení  $x_p$  lze vyjádřit vztahy

$$F_p = \frac{(2 \cdot \pi \cdot r_{kB} \cdot \sigma_E)^3}{k^2}, \quad x_p = \left(\frac{2 \cdot \pi \cdot r_{kB} \cdot \sigma_E}{k}\right)^2 \quad (2.1.48)$$

kde

$\sigma_E$  je mez pružnosti materiálu.

Doba rázu se potom rozdělí na tři části:

- a) pružná část ( $0 \leq x \leq x_p$ )
- b) pružně plastická část ( $x_p \leq x \leq x_m$ )
- c) pružně relaxační část ( $0 \leq x_e \leq x_m - x_{pm}$ )

Využijeme-li nyní stejné teorie jako při řešení rovnice (2.1.43), můžeme postupně vypočítat relativní rychlosti těsně před rázem  $v_{0rel}$  a těsně po rázu  $v_{rel}$ . Ze znalostí těchto rychlostí a rovnice (2.1.7) určíme koeficient restituce  $R$ .

V oblasti rázu vytvořili autoři ještě mnoho dalších hypotéz např. od autorů Maezawa a Watanabeho. Další teorií jak bylo zmíněno na začátku kapitoly je vlnová teorie rázu od autorů D'Alembert, Bernoulli, Euler a Lagrange.

### 2.1.3 Vlnová teorie rázu

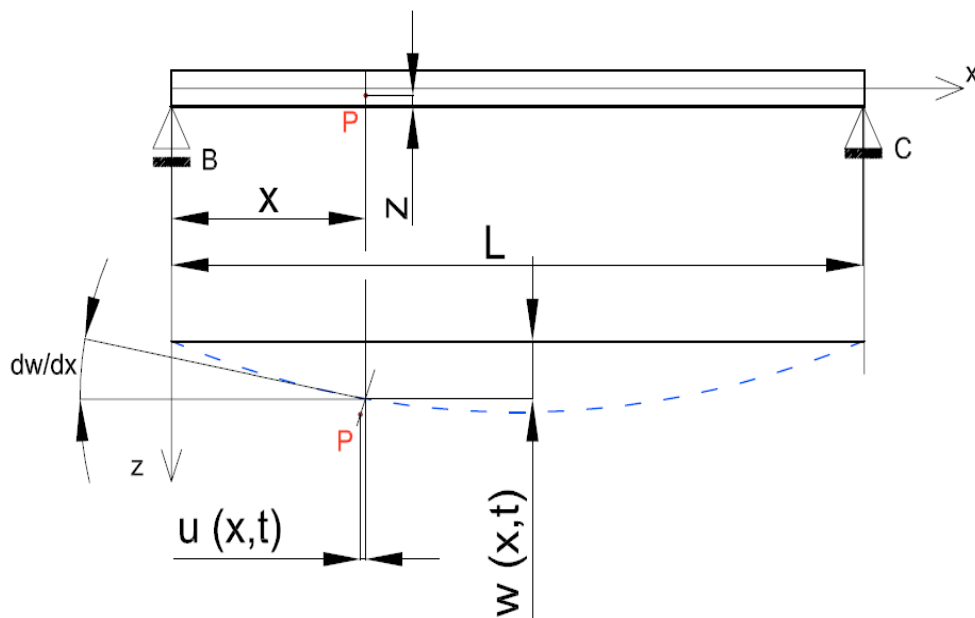
Z výše uvedených teorií je tato teorie považována za nejpokročilejší, protože její výstupy jsou nejbližší fyzikálnímu chování skutečných modelů při rázu. Tato teorie je velmi rozsáhlá a její použitelnost velmi velká, protože zahrnuje velkou škálu možných případů zatížení rázem.

Pružné soustavy mají sice nekonečně mnoho stupňů volnosti, ale při zatížení rázovým namáháním je lze řešit jako soustavu s konečným počtem stupňů volnosti. Je ale nutné u soustavy řešit vlastní kmitání, jehož tvary budou popsány spojitými funkcemi. Velkou nevýhodou tohoto řešení je, že při použití nekonečné řady se deformace i napětí mění podle nespojitých funkcí. Tento jev způsobuje šíření deformace konečnou rychlostí, což má za následek deformaci pouze části tělesa, kterou prošla deformační vlna. Zbytek tělesa zůstává nedeformován a na hranici těchto částí pak dochází ke změně napětí skokem.

Z důvodu velkého rozsahu této teorie se budeme dále zabývat pouze částí popisující příčný ráz pro ohyb nosníku. Tuto část poté následně využijeme pro stanovení průhybu při analytickém řešení námi zvoleného modelu.

### 2.1.3.1 Příčný ráz při ohybu nosníku

Pro případ příčného rázu a ohybu nosníku je potřeba brát v potaz jak vliv smykových deformací, tak i vliv rotační setrvačnosti. Průhyb nosníku při ohybovém kmitání bez vlivu smykové deformace je zobrazen na obrázku (Obr. 2.1.10).



Obr. 2.1.10 – průhyb nosníku při ohybovém kmitání bez vlivu smykového zatížení

Diferenciální rovnici pro volné ohybové kmity nosníku pak lze zapsat ve tvaru

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho \cdot S \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.1.49)$$

Potom lze pro posun bodů nosníku při ohybovém kmitání se zanedbáním vlivu smykové deformace psát rovnice

$$w = w(x, t) \quad (2.1.50)$$

$$u = u(x, t) = -z \cdot \frac{\partial w}{\partial x} \quad (2.1.51)$$

Pro případ kdy budeme uvažovat s vlivem smykové deformace, tedy nebude platit Bernoulliho hypotéza o rovinnosti průřezu, tak se nám rovnice (2.1.50) a (2.1.51) změní na tvar

$$w = w(x, t) \quad (2.1.52)$$

$$u = u(x, t) = -z \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \chi(x, t) \cdot f(z) \quad (2.1.53)$$

Dále si můžeme napsat rovnice pro napětí v bodě P (viz Obr. 2.1.10).

$$\sigma_x = E \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = E \cdot \left[ -z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \chi}{\partial x} \cdot f(z) \right] \quad (2.1.54)$$

$$\tau_{xz} = G \cdot \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = G \cdot \chi(x, t) \cdot \frac{df(z)}{dz} \quad (2.1.55)$$

V předchozích rovnicích se nám objevuje funkce  $f(z)$ , která nám představuje vliv smykové deformace na deformaci příčného průřezu při ohybovém kmitání. Využijeme-li nyní znalosti Žuravského věty (2.1.56) potom můžeme psát rovnici funkce  $f(z)$  ve tvaru uvedeném v rovnici (2.1.57).

$$\tau_{xy} = \frac{T \cdot S_{Ty}}{b \cdot J} \quad (2.1.56)$$

$$\frac{df(z)}{dz} = \frac{S}{J} \cdot \frac{S_{Ty}}{b} \quad (2.1.57)$$

S využitím rovnic (2.1.54) a (2.1.55) lze poté napsat rovnice pro výpočet vnitřních statických účinků ve tvaru

$$M = \int_S \sigma_x \cdot z \cdot dS = -E \cdot J \cdot \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - k_f \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x} \right) \quad (2.1.58)$$

$$T = \int_S \tau_{xy} \cdot dS = G \cdot S \cdot \chi(x, t) \quad (2.1.59)$$

V rovnici (2.1.58) se objevuje bezrozměrný koeficient  $k_f$ , který je funkcí tvaru příčného průřezu nosníku. Tento koeficient je popsán vztahem

$$k_f = \frac{1}{J} \cdot \int_S f(z) \cdot z \cdot dS \quad (2.1.60)$$

Pro zjednodušení výpočtu se ukázalo vhodné zavést pojem střední úhel natočení průřezu  $\vartheta$ , který je definován vztahem

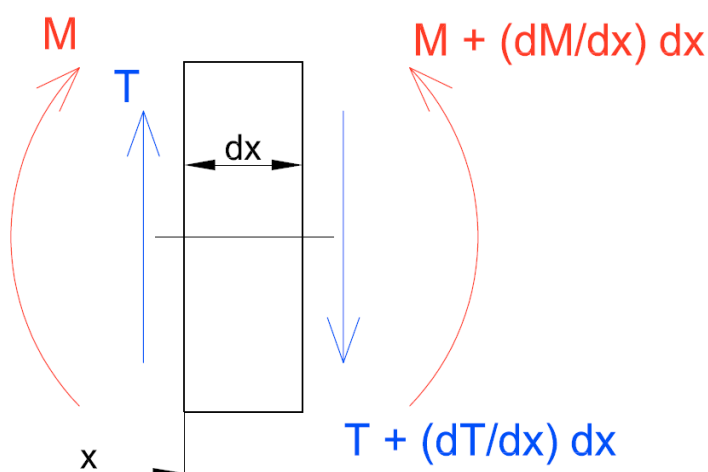
$$\vartheta(x, t) = \frac{\partial w}{\partial x} - k_f \cdot \chi \quad (2.1.61)$$

Díky tomuto střednímu úhlu natočení průřezu  $\vartheta$  se nám pak rovnice (2.1.58) a (2.1.59) zjednoduší na tvar

$$M = -E \cdot J \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \quad (2.1.62)$$

$$T = \frac{G \cdot S}{k_f} \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \vartheta \right) \quad (2.1.63)$$

Nyní si z nosníku vybereme nekonečně malý element a nakreslíme si u něj silové poměry jak je vidět na obrázku (Obr. 2.1.11).



Obr. 2.1.11 – Silové poměry na elementu nosníku



Vyjdeme-li nyní z obrázku (Obr. 2.1.11), tak můžeme psát pohybové rovnice pro element nosníku pro kmitání ve tvaru

$$\rho \cdot S \cdot dx \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial T}{\partial x} \cdot dx \quad (2.1.64)$$

$$-\rho \cdot dx \cdot \int_A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \cdot z \cdot dS = -\frac{\partial M}{\partial x} \cdot dx + T \cdot dx \quad (2.1.65)$$

Výraz na levé straně rovnice (2.1.65) značí vliv rotační setrvačnosti při kmitání. Při využití rovnic (2.1.52), (2.1.53), (2.1.58), (2.1.59) a (2.1.60) můžeme přepsat rovnice (2.1.64) a (2.1.65) do tvaru

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{k_f \cdot \rho}{G} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \quad (2.1.66)$$

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \cdot \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = -\frac{G \cdot S}{k_f \cdot E \cdot J} \cdot \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \vartheta \right) \quad (2.1.67)$$

Výsledné rovnice (2.1.66) a (2.1.67) jsou diferenciální rovnice ohybového kmitání se zahrnutím vlivu smykových deformací a rotační setrvačnosti.

Uvažujme nyní případ kmitání nosníku na dvou podporách. Pro tento případ mají rovnice (2.1.66) a (2.1.67) řešení ve tvaru

$$w(x, t) = \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \cdot [a \cdot \cos(\omega \cdot t) + b \cdot \sin(\omega \cdot t)] \quad (2.1.68)$$

$$\vartheta(x, t) = \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \cdot [c \cdot \cos(\omega \cdot t) + d \cdot \sin(\omega \cdot t)] \quad (2.1.69)$$

kde

$$n = 1, 2, \dots, \infty \quad .$$

Pro každou hodnotu  $n$  poté dostaneme dvě vlastní uhlové frekvence kmitání, které určíme pomocí vztahu

$$\omega_{nI} = \omega_0 \cdot \frac{n \cdot \lambda}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[ 1 + \alpha^2 + \frac{\alpha^2 \cdot \lambda^2}{n^2 \cdot \pi^2} - \sqrt{\left( 1 + \alpha^2 + \frac{\alpha^2 \cdot \lambda^2}{n^2 \cdot \pi^2} \right) - 4 \cdot \alpha^2} \right]} \quad (2.1.70)$$

$$\omega_{nII} = \omega_0 \cdot \frac{n \cdot \lambda}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[ 1 + \alpha^2 + \frac{\alpha^2 \cdot \lambda^2}{n^2 \cdot \pi^2} + \sqrt{\left( 1 + \alpha^2 + \frac{\alpha^2 \cdot \lambda^2}{n^2 \cdot \pi^2} \right) - 4 \cdot \alpha^2} \right]} \quad (2.1.71)$$

V rovnicích (2.1.70) a (2.1.71) je  $\omega_0$  první uhlová frekvence kmitání nosníku bez uvážení smykové deformace a rotační setrvačnosti, která se spočte dle vztahu (2.1.72).  $\lambda$  je štíhlost nosníku, která se spočte podle vztahu (2.1.73) a  $\alpha$  je součinitel dle vztahu (2.1.74).

$$\omega_0 = \frac{\pi^2}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot J}{\rho \cdot S}} \quad (2.1.72)$$

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{S}} \quad (2.1.73)$$

$$\alpha^2 = \frac{G}{k_f \cdot E} \quad (2.1.74)$$

Koeficienty  $a, b, c, d$  uvedených v rovnicích (2.1.70) a (2.1.71) se určí z okrajových podmínek a jsou vázány vztahem

$$\frac{c}{a} = \frac{d}{b} = \frac{n \cdot \pi}{L} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{n^2 \cdot \alpha^2 \cdot \lambda^2} \right] \quad (2.1.75)$$

Pohyb nosníku při rázovém zatížení nosníku lze poté psát ve tvaru

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \cdot [a_{nI} \cdot \cos(\omega_{nI} \cdot t) + b_{nI} \cdot \sin(\omega_{nI} \cdot t) + a_{nII} \cdot \cos(\omega_{nII} \cdot t) + b_{nII} \cdot \sin(\omega_{nII} \cdot t)] \quad (2.1.76)$$

$$\vartheta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \cdot [c_{nI} \cdot \cos(\omega_{nI} \cdot t) + d_{nI} \cdot \sin(\omega_{nI} \cdot t) + c_{nII} \cdot \cos(\omega_{nII} \cdot t) + d_{nII} \cdot \sin(\omega_{nII} \cdot t)] \quad (2.1.77)$$

Pro odvození koeficientů  $a_{nI}$ ,  $a_{nII}$ ,  $b_{nI}$ ,  $b_{nII}$ ,  $c_{nI}$ ,  $c_{nII}$ ,  $d_{nI}$  a  $d_{nII}$  budeme uvažovat, že nosník o délce  $L$ , narazí rychlostí  $v_0$  na dokonale tuhé podpěry B, C (viz Obr. 2.1.10). Po dopadu už nosník od podpěr neodskočí, zůstane tak neustále v kontaktu s podpěrami a nosník bude volně kmitat s uchycenými konci. V momentě nárazu v čase  $t = 0$  budou platit počáteční podmínky:

$$w(x, 0) = 0, \quad \vartheta(x, 0) = 0, \quad \left[\frac{d\vartheta}{dt}\right]_{t=0} = 0, \quad \left[\frac{dw}{dt}\right]_{t=0} = v_0 \quad (2.1.78)$$

Z rovnic (2.1.76) a (2.1.77) pro první dvě počáteční podmínky (2.1.78) musí platit podmínka

$$a_{nI} = a_{nII} = c_{nI} = c_{nII} = 0 \quad (2.1.79)$$

Pro druhé dvě počáteční podmínky a sudé hodnoty  $n$  bude platit

$$b_{nI} = b_{nII} = d_{nI} = d_{nII} = 0 \quad (2.1.80)$$

a pro liché hodnoty  $n$  musí platit vztahy

$$\begin{aligned} b_{nI} &= \frac{4 \cdot v_0}{\pi \cdot \omega_0} \cdot \frac{\omega_0}{n \cdot \omega_{nI}} \cdot \frac{e_{nII}}{e_{nII} - e_{nI}} \\ b_{nII} &= \frac{4 \cdot v_0}{\pi \cdot \omega_0} \cdot \frac{\omega_0}{n \cdot \omega_{nII}} \cdot \frac{e_{nI}}{e_{nI} - e_{nII}} \\ d_{nI} &= \frac{4 \cdot v_0}{L \cdot \omega_0} \cdot \frac{\omega_0}{n \cdot \omega_{nI}} \cdot \frac{e_{nI} \cdot e_{nII}}{e_{nII} - e_{nI}} \\ d_{nII} &= \frac{4 \cdot v_0}{L \cdot \omega_0} \cdot \frac{\omega_0}{n \cdot \omega_{nII}} \cdot \frac{e_{nI} \cdot e_{nII}}{e_{nI} - e_{nII}} \end{aligned} \quad (2.1.81)$$

Do rovnic (2.1.81) za  $e_{nI}$  a  $e_{nII}$  dosadíme

$$e_{nI} = 1 - \left(\frac{\omega_{nI}}{\omega_0}\right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{\alpha^2 \cdot n^2 \cdot \lambda^2}$$

$$e_{nII} = 1 - \left(\frac{\omega_{nII}}{\omega_0}\right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{\alpha^2 \cdot n^2 \cdot \lambda^2} \quad (2.1.82)$$

Samotný pohyb nosníku v průběhu rázu poté můžeme definovat jako

$$w(x, t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \cdot [b_{nI} \cdot \sin(\omega_{nI} \cdot t) + b_{nII} \cdot \sin(\omega_{nII} \cdot t)] \quad (2.1.83)$$

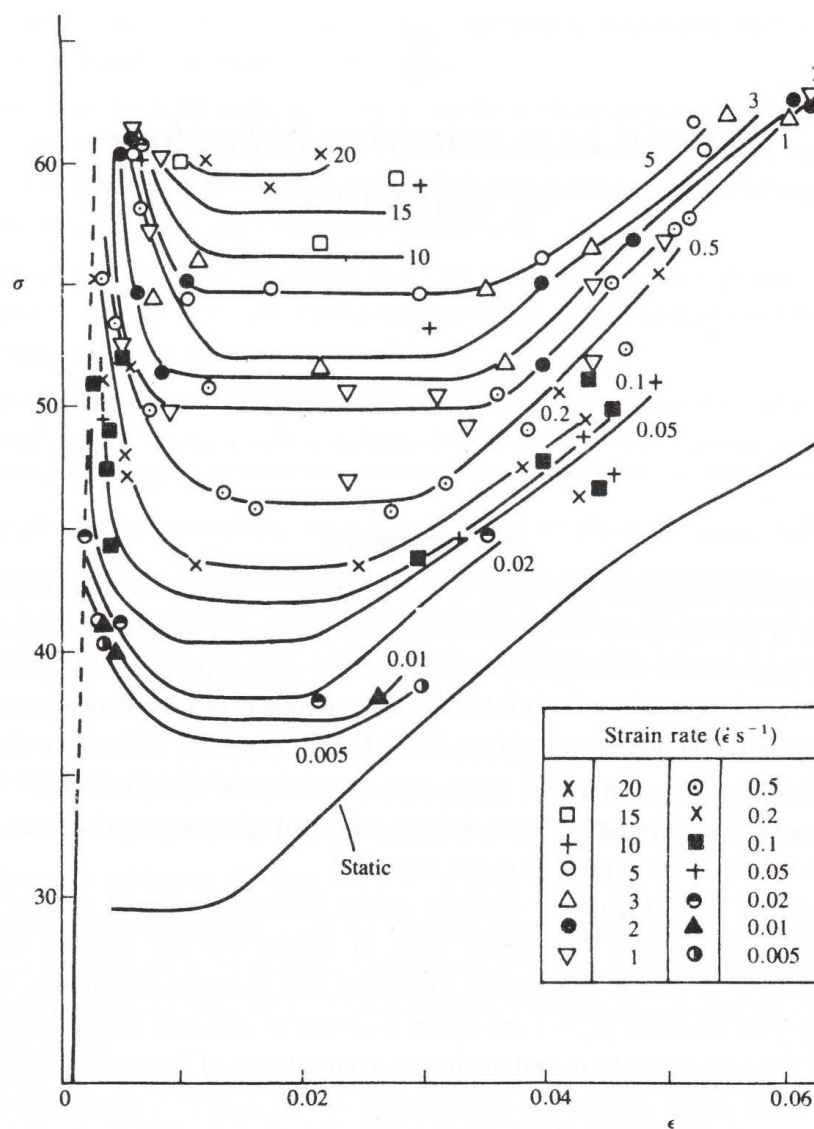
$$\vartheta(x, t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \cdot [d_{nI} \cdot \sin(\omega_{nI} \cdot t) + d_{nII} \cdot \sin(\omega_{nII} \cdot t)] \quad (2.1.84)$$

Z rovnice (2.1.62) můžeme psát rovnici pro ohybový moment v nosníku jako

$$M(x, t) = -E \cdot J \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = E \cdot J \cdot \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{n \cdot \pi}{L} \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \cdot [d_{nI} \cdot \sin(\omega_{nI} \cdot t) + d_{nII} \cdot \sin(\omega_{nII} \cdot t)] \quad (2.1.85)$$

## 2.2 Plasticita

Plasticita je schopnost materiálu se deformovat bez porušení nevratným, tvárným způsobem. Po zatížení nad mez kluzu  $\sigma_k$  nám vznikají plastické deformace, které tam zůstanou i po odlehčení součásti. Toto vzniká z důvodu, že zatížení a odlehčení neprobíhá podle stejných principů. Při řešení podle teorie plasticity vycházíme z předpokladů obdobných jako pro teorii pružnosti s výjimkou lineární pružnosti. Jedná se tedy zejména o předpoklad spojitosti látky, homogenity a izotropie, malých deformací atd. Pro náš případ se budeme zabývat hlavně vlivem rychlosti deformace  $\dot{\epsilon}$  na chování materiálu. Tento jev je vidět na obrázku (Obr. 2.2.1) a popsán pomocí materiálových modelů v kapitole 2.2.2. Obrázek (Obr. 2.2.1) byl převzat z literatury [22 str. 334].



Obr. 2.2.1 – závislost meze kluzu na rychlosti deformace

## 2.2.1 Tahová zkouška a aproximace tahového diagramu

### 2.2.1.1 Tahová zkouška a pracovní diagram

Chování materiálu ovlivňuje mnoho faktorů např. teplota, rychlost zatěžování, tvar a velikost tělesa atd. Všechny výpočty v oblasti plasticity se řeší pomocí teorie plasticity, která vychází z mechanických charakteristik materiálu zjištěných experimentem.

Nejznámější experimentální zkouškou je zkouška tahová. Tahová zkouška se provádí podle normy ČSN EN ISO 6892. Pokud si nyní vykreslíme závislost poměrného prodloužení  $\epsilon$  na napětí  $\sigma$  dostaneme tzv. smluvní pracovní diagram (Obr. 2.2.2). Tento

diagram je výsledkem tahové zkoušky. Jak je patrné z obrázku (Obr. 2.2.2) má diagram jisté výrazné body. Z těchto bodů se dají odečíst určité meze materiálu.

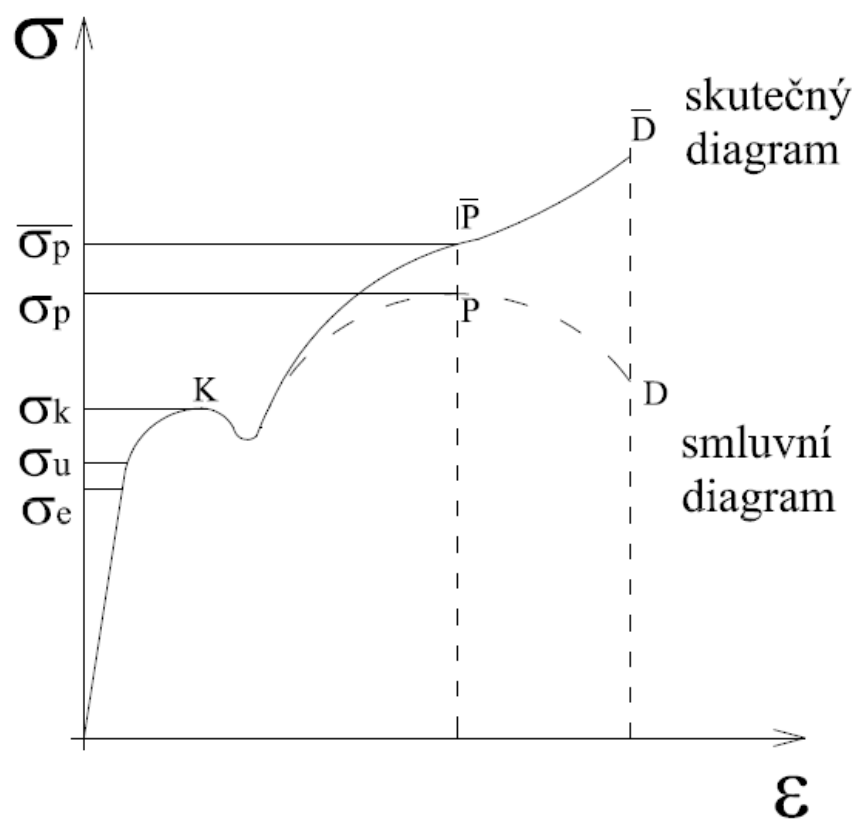
Smluvní diagram vychází ze vztahů:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (2.2.1)$$

$$\sigma_t = \frac{F}{S_0} \quad (2.2.2)$$

kde

$\varepsilon$	je poměrné prodloužení zkušební tyče,
$\Delta l$	je prodloužení zkušební tyče,
$l_0$	je původní délka zkušební tyče,
$\sigma_t$	je napětí v tahu,
$F$	je zatěžující síla,
$S_0$	je původní průřez zkušební tyče.



Obr. 2.2.2 porovnání skutečného a pracovního diagramu

Na obrázku (Obr. 2.2.2) je

- $\sigma_U$  mez úměrnosti – lineární závislost mezi napětím a poměrným prodloužením
- $\sigma_E$  mez pružnosti – po tuto mez se materiál chová pružně
- $\sigma_K$  mez kluzu – materiál se prodlužuje, aniž by rostlo zatížení
- $\sigma_P$  mez pevnosti – dochází k tvorbě krčku a přetržení vzorku
- D bod kdy dojde k přetržení vzorku

V materiálových listech se běžně udávají smluvní dovolené hodnoty napětí, které vycházející právě ze smluvního diagramu. Na obrázku (Obr. 2.2.2) je ukázka porovnání smluvního pracovního diagramu se skutečným pracovním diagramem.

Na tomto obrázku (Obr. 2.2.2) je vidět, že pro plastické deformace, které se pohybují za mezí kluzu (bodem K), roste s velikostí plastické deformace i velikost chyby mezi skutečným pracovním diagramem a smluvním pracovním diagramem. Z tohoto důvodu bude pro výpočet použit skutečný pracovní diagram.

$$\bar{\varepsilon} = \ln \frac{l}{l_0} \quad (2.2.3)$$

$$\bar{\sigma}_t = \frac{F}{S} \quad (2.2.4)$$

kde

$\bar{\varepsilon}$	je skutečné poměrné prodloužení tyče,
$l$	je aktuální délka zkušební tyče,
$l_0$	je původní délka zkušební tyče,
$\bar{\sigma}_t$	je skutečné napětí v tahu,
$F$	je zatěžující síla,
$S$	je aktuální průřez zkušební tyče.

Maximální hodnotu skutečného napětí pro lom (bod  $\bar{D}$  na obrázku Obr. 2.2.2) lze poté určit ze vztahu (2.2.5).

$$\overline{\sigma_{tD}} = \frac{F_D}{S_D} \quad (2.2.5)$$

kde

$\overline{\sigma_{tD}}$	je maximální skutečné napětí v tahu,
$F_D$	je maximální zatěžující síla,
$S_D$	je průřez zkušební tyče v místě lomu.

Kromě výše uvedených tipů pracovních diagramů existují ještě i další typy, které se odlišují tím, co mají vyneseno na ose x. Můžeme tak dostat pracovní diagram v závislosti na přirozeném prodloužení (2.2.6) nebo na hodnotě poměrného zúžení (2.2.7).

$$e = \ln(1 + \varepsilon) \quad (2.2.6)$$

$$\psi = \frac{S_0 - S}{S_0} \quad (2.2.7)$$

kde

$S_0$	je počáteční velikost průřezu zkušební tyče,
$S$	je okamžitá velikost průřezu zkušební tyče.

### **2.2.1.2 Aproximace pracovního diagramu**

V teorii plasticity je nutné mít k dispozici závislost napětí na přetvoření. Tuto závislost by pro přesný popis bylo nutné popsat pomocí značně složitých funkcí. Následné zavádění těchto funkcí do výpočtu by bylo značně komplikované a samotný výpočet by se tím stal nepřehledným. Z tohoto důvodu se využívá aproximace průběhu pracovního diagramu. Nejčastěji se pro aproximaci pracovního diagramu využívá aproximace pomocí lomené přímky nebo pomocí paraboly vyššího řádu.



### Aproximace pomocí lomené přímky

Tato jednoduchá a proto i velmi často používaná aproximace pracovního diagramu je znázorněna na obrázku (Obr. 2.2.3). Pomocí lomené přímky lze aproximovat pracovní diagram buď jako pro ideálně plastický materiál ( $E_z = 0$ ) nebo pro plastický materiál ( $E_z \neq 0$ ) viz obrázek (Obr. 2.2.3).

Na obrázku (Obr. 2.2.3) je patrné, že pro napětí  $\sigma < \sigma_k$ , kde  $\sigma_k$  je aproximovaná hodnota skutečné meze kluzu. Musí proto platit vztah

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E \quad (2.2.8)$$

kde

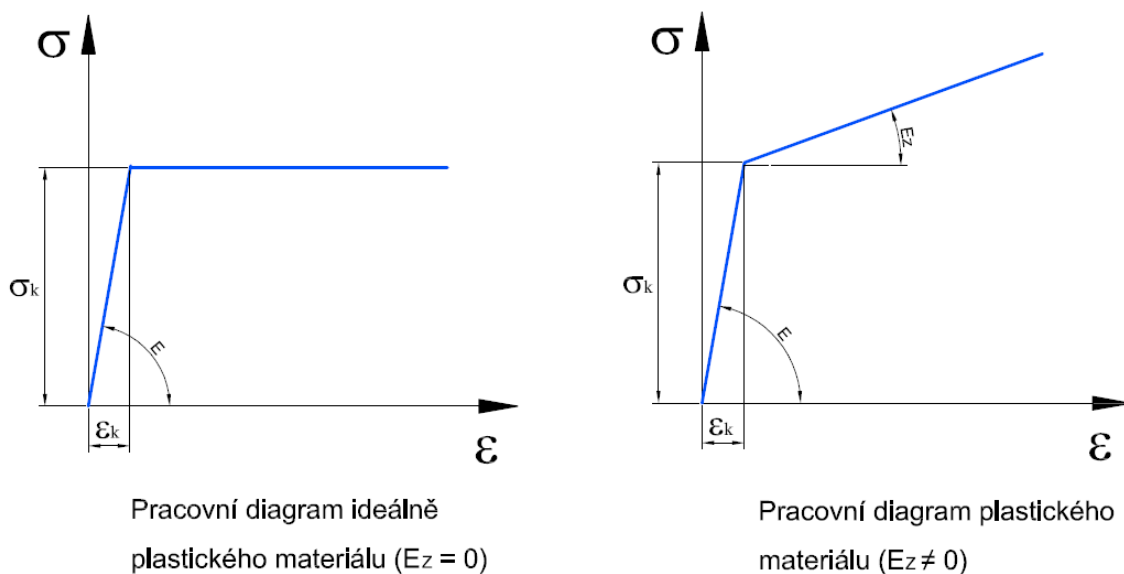
$E$  je modul pružnosti v tahu.

Naopak pokud napětí  $\sigma$  splňuje podmínku  $\sigma > \sigma_k$ , tak platí vztah

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_z \quad (2.2.9)$$

kde

$E_z$  je modul zpevnění.

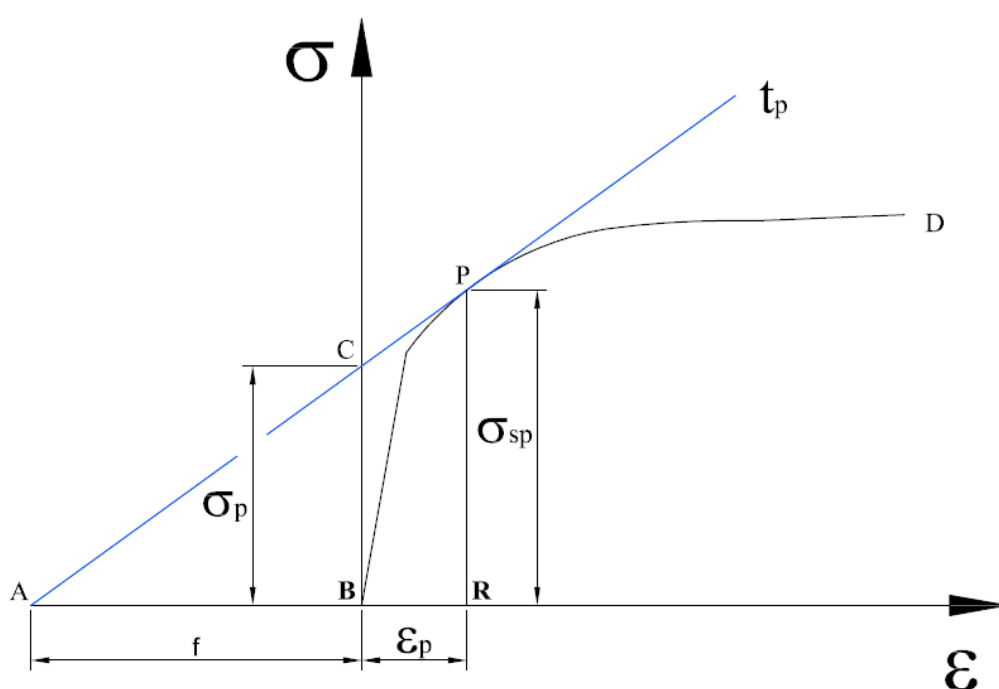


Obr. 2.2.3 – aproximace pracovního diagramu pomocí lomené přímky

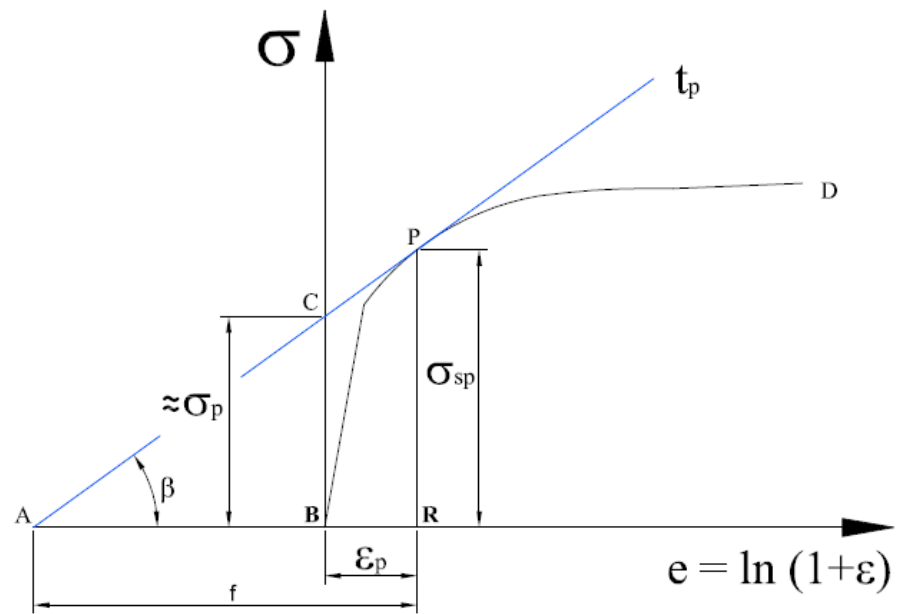
Pro houževnaté materiály, které nemají výraznou mez kluzu, platí že  $\varepsilon_s \gg \varepsilon_k$  a z tohoto důvodu mají modul zpevnění  $E_z = 0$ . Tyto materiály pak aproximujeme podle Prandtlova návrhu jako ideálně plastické materiály (viz Obr. 2.2.3).

Samotnou aproximaci pak můžeme provést pro několik typů pracovních diagramů a to např. pro klasický pracovní diagram  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ , jak je uvedeno na obrázku (Obr. 2.2.4), dále třeba pro pracovní diagram kde na ose x bude vyneseno přirozené prodloužení  $e$ . Dostaneme tedy pracovní diagram pro  $\sigma = \sigma(e)$ , jak je znázorněno na obrázku (Obr. 2.2.5). Nebo v neposlední řadě také pomocí pracovního diagramu kde na vodorovné ose vyneseme poměrné zúžení  $\psi$ . Dostaneme tedy pracovní diagram pro  $\sigma = \sigma(\psi)$ , jak je znázorněno na obrázku (Obr. 2.2.6). Další možnou aproximací je pomocí paraboly vyššího řádu (Obr. 2.2.6)

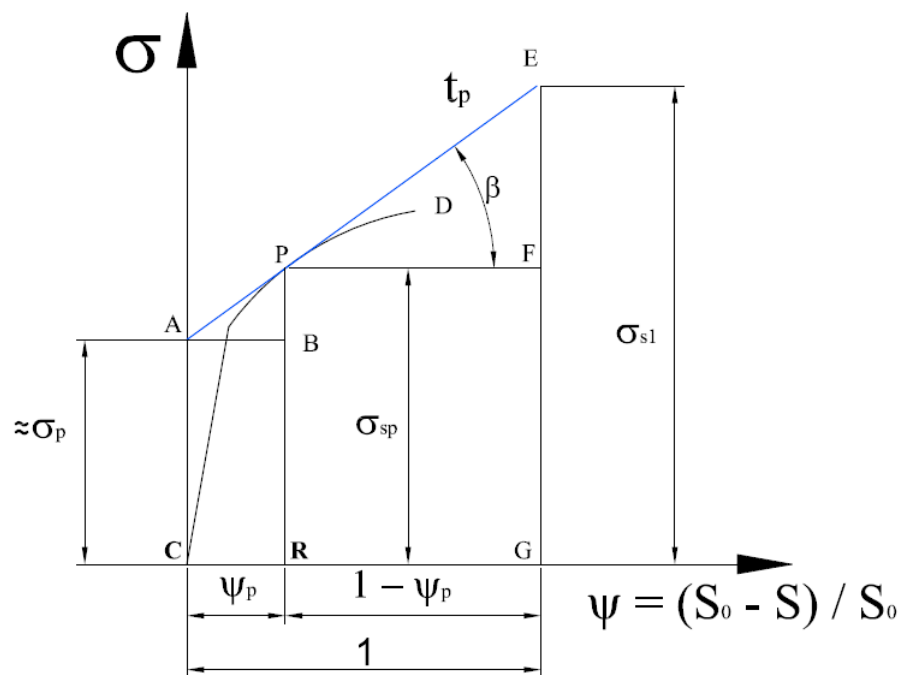
My provedeme aproximaci pomocí druhého zmiňovaného pracovního diagramu  $\sigma = \sigma(e)$ , který je zobrazen na obrázku (Obr. 2.2.5).



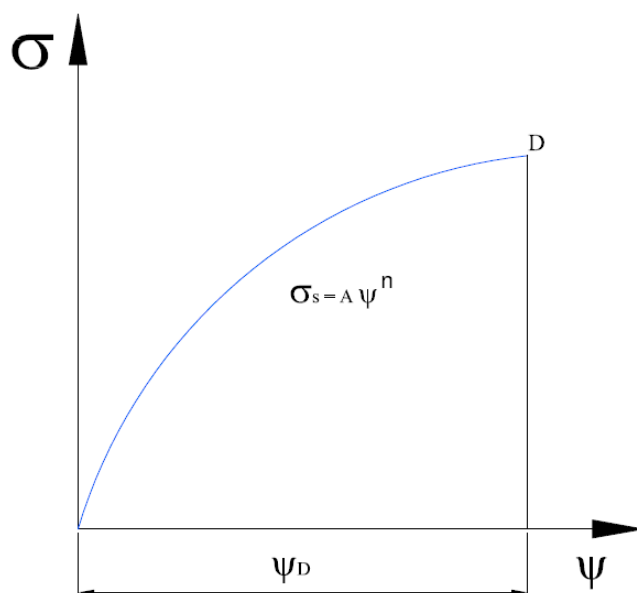
Obr. 2.2.4 – vlastnosti pracovního diagramu  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$



Obr. 2.2.5 – vlastnosti pracovního diagramu  $\sigma = \sigma(e)$



Obr. 2.2.6 – vlastnosti pracovního diagramu  $\sigma = \sigma(\psi)$



Obr. 2.2.7 – aproximace pracovního diagramu pomocí paraboly vyššího řádu

Každý typ pracovního diagramu má jiné vlastnosti, tak i jejich aproximace bývá odlišná. My se zde budeme zabývat aproximací pracovního diagramu, na jehož vodorovné ose budeme mít vyneseno přirozené prodloužení  $e$ . Dostaneme tedy pracovní diagram pro  $\sigma = \sigma(e)$ , jak je znázorněno na obrázku (Obr. 2.2.5).

Pro řešení přirozeného prodloužení se využívá vztahu

$$e = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) = \ln(1 + \varepsilon) \quad (2.2.10)$$

Využitím podmínky o stálosti objemu při plastické deformaci (2.2.6) a dosazením a úpravou vztahu (2.2.10) dostaneme vztah

$$e = \ln\left(\frac{l}{l_0}\right) = \ln\left(\frac{s_0}{s}\right) = -\ln\left(\frac{s}{s_0}\right) \quad (2.2.11)$$

Dále musí platit

$$\sigma_s = \frac{F}{s} \quad (2.2.12)$$

Upravíme-li vztah (2.2.12) dostaneme:

$$F = \sigma_s \cdot S = \sigma_s \cdot S_0 \cdot \frac{S}{S_0} \quad (2.2.13)$$

Pokud nyní tento vztah (2.2.13) zlogaritmuje, dostaneme vztah (2.2.14), který se s přihlédnutím ke vztahu (2.2.11) změní ve vztah (2.2.15).

$$\ln F = \ln \sigma_s + \ln S_0 + \ln \left( \frac{S}{S_0} \right) \quad (2.2.14)$$

$$\ln F = \ln \sigma_s + \ln S_0 - e \quad (2.2.15)$$

Z rovnice (2.2.15) diferencováním získáme vztah

$$\frac{dF}{F} = \frac{d\sigma_s}{\sigma_s} + 0 - de \quad (2.2.16)$$

Síla  $F$  je ale maximální v okamžiku kdy se začíná na zkušební tyči tvořit krček (smluvní mez pevnosti  $\sigma_p$ ). Tedy nutně potom musí platit podmínka

$$dF_p = 0 \quad (2.2.17)$$

Dosadíme-li podmínku (2.2.17) do rovnice (2.2.16) dostaneme podmínku:

$$\frac{d\overline{\sigma_p}}{\overline{\sigma_p}} = de_p = 0 \quad (2.2.18)$$

Úpravou dostaneme vztah:

$$\frac{d\overline{\sigma_p}}{de_p} = \overline{\sigma_p} \quad (2.2.19)$$

Z obrázku (Obr. 2.2.5) a vztahu (2.2.19) vychází rozměr základny trojúhelníku ARP je rovna  $\overline{AR} = 1$ . Dalším porovnáváním podobnosti trojúhelníků (2.2.20), využitím vztahu (2.2.11) a úpravou dostaneme vztah (2.2.21).

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{RP}}{\overline{AR}} \quad (2.2.20)$$

$$\overline{BC} = \overline{\sigma_p} \cdot (1 - e_p) = \overline{\sigma_p} \cdot \left(1 + \ln\left(\frac{S_p}{S_0}\right)\right) = \overline{\sigma_p} \cdot \left[1 + \ln\left(1 - \frac{\Delta S_p}{S_0}\right)\right] \quad (2.2.21)$$

kde

$\Delta S_p$  je změna velikosti průřezu tyče na smluvní mezi pevnosti.

Využitím rozvoje dostaneme vztah (2.2.22), z něhož ale použijeme pouze první člen, poněvadž víme, že platí  $\Delta S_p \ll S_0$ .

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad (2.2.22)$$

Dosadíme-li první člen rozvoje do vztahu (2.2.21) získáme po úpravě výsledný vztah.

$$\overline{BC} \cong \overline{\sigma_p} \cdot \left(1 - \frac{\Delta S_p}{S_0}\right) = \overline{\sigma_p} \cdot \frac{S_0 - \Delta S_p}{S_0} = \overline{\sigma_p} \cdot \frac{S_p}{S_0} = \frac{F_p}{S_0} = \sigma_p \quad (2.2.23)$$

Ze vztahu (2.2.23) vyplývá, že úsek uťatý tečnou  $t_p$  na svislé ose se pouze přibližně rovná smluvní mezi pevnosti. Protože podle Smirnova-Aljajeva ale poměr  $\frac{S_0}{S_p}$  nezávisí na teplotě, ale pouze na materiálu. Z tohoto důvodu lze využít v případě, že neznáme přesné hodnoty, hodnoty zjištěné experimentálně, které jsou uvedeny v následující tabulce (Tab. 2.2.1). Tato tabulka je převzata s literatury [15 str. 77].

Materiál	Poměr $\frac{S_0}{S_p}$
ocel	1,10 až 1,25
hliník	1,00 až 1,10
mosaz	1,50 až 1,55
měď	1,55 až 1,60

**Tab. 2.2.1**

Ze znalostí uvedených hodnot a na základě známých vlastností lze v jakémkoliv pracovním diagramu zakreslit tečnu  $t_p$ . Tuto tečnu  $t_p$  lze použít jako aproximaci pracovního diagramu i pokud neznáme přesný průběh pracovního diagramu. Umožňuje nám to fakt, že skutečný průběh pracovního diagramu se od této tečny  $t_p$  příliš neliší a za smluvní mezi pevnosti už není samotný průběh pracovního diagramu přesně zjištěitelný. Pro zpevňující se materiálu můžeme dokonce zanedbat oblast před mezí kluzu a nedopustíme se příliš velké chyby. Konečný bod všech aproximovaných diagramů se určuje z experimentálně zjištěných hodnot.

## **2.2.2 Materiálové modely**

Při numerickém řešení budou zahrnuté do výpočtu i materiálové vlastnosti materiálu a to z oblasti plasticity. V našem případě se jedná hlavně o zahrnutí citlivosti materiálu na rychlost deformace, jak je vidět na obrázku (Obr. 2.2.1). Proto se v této kapitole zaměříme na některé materiálové modely.

Jedná se hlavně o materiálové modely:

- a) Cowper – Symonds pevnostní model
- b) Johnson – Cook pevnostní model
- c) Zerrili – Armstrong pevnostní model

### Cowper – Symonds pevnostní model

Tento pevnostní model nám umožňuje definovat mez kluzu pro izotropní deformační zpevnění v závislosti na rychlosti deformace. Výsledná mez je poté definována jako

$$Y = \left( A + B \cdot \varepsilon_{pl}^n \right) \left( 1 + \left( \frac{\dot{\varepsilon}_{pl}}{D} \right)^{1/q} \right) \quad (2.2.24)$$

kde

$A$	je mez kluzu,
$B$	koeficient deformačního zpevnění,
$n$	je exponent deformačního zpevnění,
$D$ a $q$	jsou koeficienty rychlosti deformačního zpevnění.

Hodnoty koeficientů deformačního zpevnění  $D$  a  $q$  jsou pro některé materiály uvedené v tabulce (Tab. 2.2.2). Tyto hodnoty byly získány experimentálně a jsou převzaty s literatury [22 str. 349].

Materiál	$D$ (s <sup>-1</sup> )	$q$	Odkaz na autora
Měkká ocel	40,4	5	Cowper a Symonds
Hliníkové slitiny	6500	4	Bodner a Symonds
Titan (Ti 50A)	120	9	Symonds a Chon
Nerezová ocel 304	100	10	Forrestal a Sagartz

Tab. 2.2.2

### Johnson - Cook pevnostní model

Tento model je také nazýván viskoplastickým modelem. Tento materiálový model plasticity je závislý na rychlosti deformace a na teplotě, proto se tento model nejlépe hodí pro případy, kdy se velikosti deformace liší ve velkém rozsahu a změny teplot způsobené plastickou deformací by mohly způsobit změknutí materiálu. Materiálový model je popsán rovnicí (2.2.25).



$$\sigma_y = (A + B \cdot \bar{\epsilon}_p^n) \cdot (1 + c \cdot \ln \dot{\epsilon}^*) \cdot (1 - T^{*m}) \quad (2.2.25)$$

kde

$A, B, C, n, m$  jsou materiálové konstanty  
 $\bar{\epsilon}_p$  je efektivní plastická deformace.

Další dvě veličiny z rovnice (2.2.25) jsou definovány takto.

$$\dot{\epsilon}^* = \frac{\bar{\epsilon}_p}{\dot{\epsilon}_0} \quad (2.2.26)$$

$$T^* = \frac{T - T_{room}}{T_{melt} - T_{room}} \quad (2.2.27)$$

### **Zerilli – Armstrong pevnostní model**

Zerilli – Armstrong vycházeli při tvorbě svého materiálového modelu s modelu Johnson – Cooka a tento model vylepšili tak, že navrhli propracovanější konstitutivní rovnici. Do formulace materiálového modelu začlenili deformační zpevnění, rychlost deformačního zpevnění, vliv velikosti zrna a tepelné změkčování (na základě teplotně aktivační analýzy). Díky tomu vznikly dva jednoduché vztahy pro materiály s fcc strukturou (plošně centrovaná krychle) rovnice (2.2.28) a pro materiály s bcc strukturou (objemově centrovaná krychle) rovnice (2.2.29). Toto bylo velmi důležité, protože tak zavedli pro každou materiálovou strukturu vlastní konstitutivní rovnici popisující chování materiálu.

$$Y = Y_0 + C_2 \cdot \sqrt{\epsilon} \cdot \exp[-C_3 \cdot T + C_4 \cdot T \log \dot{\epsilon}] \quad (2.2.28)$$

$$Y = Y_0 + C_1 \cdot \exp[-C_3 \cdot T + C_4 \cdot T \cdot \log \dot{\varepsilon}] + C_5 \cdot \varepsilon^n \quad (2.2.29)$$

kde

$\varepsilon$	je efektivní plastická deformace,
$\dot{\varepsilon}$	je normalizovaná rychlost plastické deformace,
$T$	je teplota [K],
$Y_0, C_1, C_2, C_3,$	jsou materiálové konstanty.
$C_4, C_5, n$	

## 2.3 Numerické metody

Numerické metody používané v MKP programech se dělí na explicitní (přímé metody) a implicitní (nepřímé metody). Další rozdělí je na jednokrokové a vícekové metody. Většina MKP programů využívá právě implicitní metody řešení.

### Implicitní metody

Tyto metody standardně využívají Newmarkova schématu integrace. Podle tohoto schématu musí řešení splňovat následující pohybovou rovnici.

$$M \cdot a'_{n+1} + C \cdot v'_{n+1} + K \cdot d'_{n+1} = F_{n+1}^{ext} \quad (2.3.1)$$

kde

$M$	je matice hmotnosti,
$C$	je matice tlumení,
$K$	je matice tuhosti,
$F_{n+1}^{ext}$	je vektor externího zatížení pro krok $n + 1$ ,
$a'_{n+1}$	je odhad zrychlení pro krok $n + 1$ ,
$v'_{n+1}$	je odhad rychlosti pro krok $n + 1$ ,
$d'_{n+1}$	je odhad posunutí pro krok $n + 1$ .

Odhad rychlosti a posunutí lze určit podle rovnic

$$d'_{n+1} = d_n + v_n \cdot \Delta t + \frac{(1-2\beta) \cdot a_n \cdot \Delta t^2}{2} + \beta \cdot a'_{n+1} \cdot \Delta t^2 \quad (2.3.2)$$

nebo

$$d'_{n+1} = d_n^* + \beta \cdot a'_{n+1} \cdot \Delta t^2 \quad (2.3.3)$$

$$v'_{n+1} = v_n^* + \gamma \cdot a'_{n+1} \cdot \Delta t \quad (2.3.4)$$

kde

$\Delta t$  je velikost časového kroku,  
 $\beta, \gamma$  jsou konstanty.

Hodnoty  $d_n^*$  a  $v_n^*$  jsou predikovány z již spočítaných hodnot.

Dosazením těchto hodnot do pohybové rovnice (2.3.1) a úpravou dostaneme

$$[M + C \cdot \gamma \cdot \Delta t + K \cdot \beta \cdot \Delta t^2] a'_{n+1} = F_{n+1}^{\text{ext}} - C \cdot v_n^* - K \cdot d_n^* \quad (2.3.5)$$

Pohybovou rovnici lze poté definovat jako:

$$M^* \cdot a'_{n+1} = F_{n+1}^{\text{residual}} \quad (2.3.6)$$

Zrychlení lze poté získat z rovnice (2.3.6) pomocí inverze matice hmotnosti  $M$ .  
 Výsledná rovnice pak má podobu

$$a'_{n+1} = M^{*-1} \cdot F_{n+1}^{\text{residual}} \quad (2.3.7)$$

## Explicitní metody

Toto řešení vychází z pohybové rovnice ve tvaru

$$M \cdot a_n + C \cdot v_n + K \cdot d_n = F_n^{\text{ext}} \quad (2.3.8)$$

Tuto rovnici (2.3.8) pak můžeme přepsat na tvar

$$M \cdot a_n = F_n^{\text{ext}} - F_n^{\text{int}} \quad (2.3.9)$$

kde

$M$	je matice hmotnosti,
$a_n$	je zrychlení,
$F_n^{\text{ext}}$	je vektor externích sil,
$F_n^{\text{int}}$	je vektor interních sil (síly vzniklé přetvořením elementu, hourglassingové síly).

Zrychlení pak lze opět určit pomocí inverze matice hmotnosti  $M$ . V případě že matice hmotnosti  $M$  bude diagonální, dostaneme triviální řešení, při kterém musí pro každý stupeň volnosti platit

$$a_{ni} = \frac{F_{ni}^{\text{residual}}}{M_i} \quad (2.3.10)$$

Dále platí rovnice pro výpočet rychlosti a posunutí ve tvaru

$$v_{n+1/2} = v_{n-1/2} + a_n(\Delta t_{n+1/2} + \Delta t_{n-1/2})/2 \quad (2.3.11)$$

$$d_{n+1} = d_n + v_{n+1/2}\Delta t_{n+1/2} \quad (2.3.12)$$

Z tohoto vyplývá, že explicitní řešení nevyžaduje rozklad a řešení matic a místo toho se provede řešení pro každý časový krok zvlášť. Vychází se z předpokladu, že je v délce časového kroku konstantní.

Porovnáním obou metod tedy vidíme, že složitost implicitního řešení je závislá na rychlosti konvergence iteračního procesu. Explicitní řešení je oproti tomu jednodušší, ale tato metoda je méně stabilní než metoda implicitní. Stabilita explicitního řešení je závislá na tom, že časový krok řešení nesmí překročit kritickou hodnotu, která se určí z rychlosti průchodu napěťové vlny elementem.

Kritickou hodnotu časového kroku lze tedy definovat pomocí rovnice

$$\Delta t_{crit} = l_e \cdot \sqrt{\frac{\rho}{E}} \quad (2.3.13)$$

kde

$l_e$	je charakteristická velikost elementu,
$\rho$	je hustota materiálu,
$E$	je modul pružnosti v tahu.

Z rovnice (2.3.13) je poté patrné, že stabilita explicitního výpočtu silně závisí na velikosti elementu. Z tohoto důvodu je velmi důležité mít u explicitního řešení co nejrovnoměrnější síť s podobnými velikostmi elementu, tak aby nedocházelo k výraznému prodlužování výpočtového času z důvodu jednoho nebo pár výrazně menších elementů.

Dalším specifickým námi použitým explicitním řešením je, že pro popis elementu používají pouze jeden integrační bod (Gaussův integrační bod). V tomto jediném bodě se poté vyhodnocuje napětí a deformace, což je velmi výhodné z hlediska výpočtového času. Nevýhodou použití pouze jediného integračního bodu je riziko vzniku tzv. hourglassingu, což je mód s nulovou energií způsobující nestabilitu systému. Hourglassing je nežádoucí jev a proto by jeho hodnota neměla přesáhnout 10% celkové vnitřní energie systému.

### 3. Praktická část

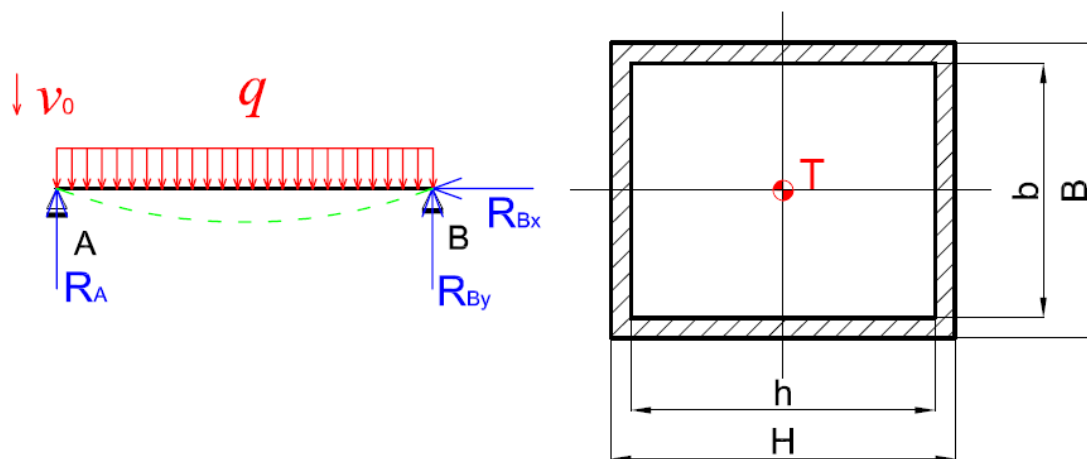
V této části se budeme nejdříve zabývat analytickým výpočtem zjednodušeného modelu části hrázových dveří a poté provedeme numerický výpočet celých dveří pomocí MKP. Další sekcí této části budou data získaná při experimentálním měření. V poslední části této kapitoly dojde k srovnání všech získaných dat.

#### 3.1 Analytický výpočet

V analytickém výpočtu budeme řešit spodní nosník hrázových dveří, u kterého předpokládáme největší deformace při výbuchu. Tento nosník si nahradíme zjednodušeným případem nosníku na dvou podporách zatíženého staticky tlakem  $p$  a dynamicky dopadovou rychlostí dveří na rám dveří  $v_0$ . Pro tento případ budeme řešit maximální průhyb nosníku. Samotný průhyb budeme řešit dvěma teoriemi. V prvním případě využijeme teorii s použitím koeficientu rázu založenou na nahrazení soustavy jednoduchým případem soustavy s jedním stupněm volnosti. V druhém případě použijeme teorii pro příčný ráz při ohybu nosníku.

##### Zadání

Při řešení průhybu budeme tedy uvažovat nosník na dvou podporách zatížený dle obrázku (Obr. 3.1.1).



Obr. 3.1.1 – zadání analytického výpočtu

Zadané hodnoty:

$$\begin{array}{llll} E = 210000 \text{ MPa} & p = 1 \text{ MPa} & v_0 = 42 \text{ mm s}^{-1} & L = 1880 \text{ mm} \\ H = 147 \text{ mm} & h = 127 \text{ mm} & B = 172 \text{ mm} & b = 152 \text{ mm} \end{array}$$

### 3.1.1 Průhyb podle teorie koeficientu rázu

Při využití této teorie se vychází z předpokladu, že se řešená soustava nahradí soustavou s jediným stupněm volnosti. Pro tuto náhradní soustavu se poté vyřeší statický průhyb nosníku a vynásobí se koeficientem rázu. Výsledný maximální průhyb nosníku se poté spočte podle rovnice

$$\delta_{max} = k_{dyn} \cdot \delta_{stat} \quad (3.1.1)$$

#### Výpočet průhybu od statického zatížení $p = 1 \text{ MPa}$

Nejprve si musíme přepočítat tlakové zatížení  $p$  na spojité zatížení  $q$ . Vyjdeme z rovnic (3.1.2) a (3.1.3) jejichž porovnáním a následnou úpravou dostaneme rovnici pro spojité zatížení  $q$  (3.1.4).

$$q = \frac{F}{L} \rightarrow F = q \cdot L \quad (3.1.2)$$

$$p = \frac{F}{S} \rightarrow F = p \cdot S \quad (3.1.3)$$

$$q = \frac{p S}{L} = \frac{1 \cdot 276000}{1880} = 147,021 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \quad (3.1.4)$$

kde

$S$  je plocha na kterou působí tlak ( $S = H \cdot L$ )

Dále si určíme z rovnic rovnováhy (3.1.5) velikost reakčních sil.

$$\sum_i F_{xi} = 0 \rightarrow R_{Bx} = 0$$

$$\sum_i F_{yi} = 0 \rightarrow R_A + R_{By} - q \cdot L = 0$$

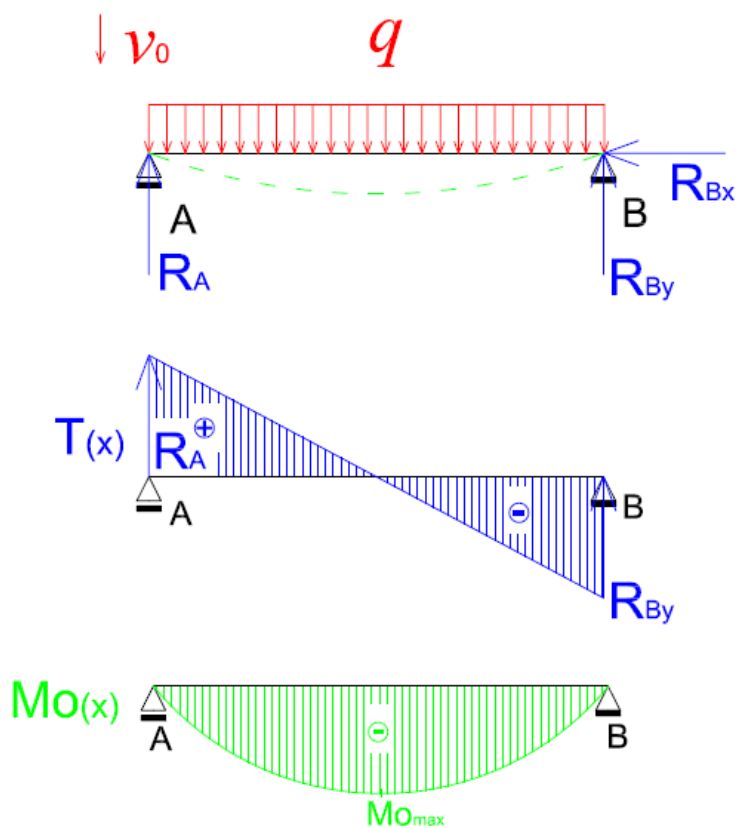
$$\sum_i M_{OBi} = 0 \rightarrow q \cdot \frac{L^2}{2} - R_A \cdot L = 0$$

(3.1.5)

Výsledné reakce:

$$R_A = \frac{q \cdot L}{2} = 138180 \text{ N}, R_{Bx} = 0 \text{ N}, R_{By} = \frac{q \cdot L}{2} = 138180 \text{ N}$$

Vykreslíme si průběh posouvajících sil  $T(x)$  a ohybových momentů  $MO(x)$  viz obrázek (Obr. 3.1.2) a napíšeme si příslušné rovnice (3.1.6) a (3.1.7).



Obr. 3.1.2– průběh posouvajících sil a ohybových momentů



$$T(x) = RA - q \cdot x = q \left( \frac{L}{2} - x \right) \quad (3.1.6)$$

$$MO(x) = RA \cdot x - q \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{q \cdot (L \cdot x - x^2)}{2} \quad (3.1.7)$$

Průhyb vyřešíme pomocí rovnice průhybové čáry (3.1.8), kterou dvakrát zintegrujeme a z okrajových podmínek určíme integrační konstanty  $C_1$  a  $C_2$ .

$$\frac{d^2 \delta_{stat}}{dx^2} = \frac{-MO(x)}{E \cdot J_y} \quad (3.1.8)$$

$$E \cdot J_y \cdot \frac{d^2 \delta_{stat}}{dx^2} = \frac{-q \cdot (L \cdot x - x^2)}{2}$$

$$E \cdot J_y \cdot \frac{d \delta_{stat}}{dx} = \frac{q}{2} \cdot \left( \frac{L \cdot x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) + C_1$$

$$E \cdot J_y \cdot \delta_{stat} = \frac{q}{2} \cdot \left( \frac{L \cdot x^3}{6} - \frac{x^4}{12} \right) + C_1 \cdot x + C_2$$

Okrajové podmínky:  $x = 0 \rightarrow \delta_{stat} = 0$  a  $x = L \rightarrow \delta_{stat} = 0$

$$C_1 = \frac{\frac{q}{2} \left( \frac{L^4}{6} - \frac{L^4}{12} \right)}{L} = \frac{-q \cdot L^3}{24}$$

$$C_2 = 0$$

Rovnice pro průhyb (3.1.9) a pro natočení (3.1.10).

$$\delta_{stat}(x) = \frac{q \cdot (-x^4 + 2 \cdot L \cdot x^3 - L^3 \cdot x)}{24 \cdot E \cdot J_y} \quad (3.1.9)$$

$$\Phi(x) = \frac{q \cdot (-4 \cdot x^3 + 6 \cdot L \cdot x^2 - L^3 \cdot x)}{24 \cdot E \cdot J_y} \quad (3.1.10)$$

Do rovnice pro průhyb (3.1.9) potřebujeme ještě zjistit statický moment setrvačnosti  $J_y$ . Ten si odvodíme prodaný průřez podle rovnice

$$J_y = \int_{(S)} z^2 ds = 2 \cdot \int_0^{H-h/2} z^2 \cdot (B - b) dz = \frac{BH^3 - bh^3}{12} = 1,958 \cdot 10^7 \text{ mm}^4 \quad (3.1.11)$$

Maximální průhyb se poté určí pro  $x = \frac{L}{2}$  což vychází z průběhu ohybového momentu (Obr. 3.1.2).

$$\delta_{stat} \left( \frac{L}{2} \right) = \frac{q \cdot \left( -\left( \frac{L}{2} \right)^4 + 2 \cdot L \cdot \left( \frac{L}{2} \right)^3 - L^3 \cdot \frac{L}{2} \right)}{24 \cdot E \cdot J_y} = -5,294 \text{ mm} \quad (3.1.12)$$

### Výpočet celkového maximálního průhybu nosníku

Nyní si určíme koeficient rázu  $k_{dyn}$ , kterým následně vynásobíme statický průhyb  $\delta_{sta}$  a získáme celkový průhyb pro dynamické zatížení  $\delta_{max}$  dle rovnice (3.1.1). Koeficient rázu  $k_{dyn}$  určíme z porovnání kinetické energie při rázu  $E_k$  a potenciální energie při statickém zatížení  $E_p$  podle rovnice

$$k_{dyn} = 1 + \sqrt{1 + \frac{E_k}{E_p}} \quad (3.1.13)$$

Do této rovnice (3.1.13) potřebujeme určit kinetickou energii  $E_k$  dle vztahu (3.1.16) a potenciální energii  $E_p$  dle vztahu (3.1.18). Pro výpočet kinetické energie budeme potřebovat ještě hmotnost dveří z redukovat na spodní nosník a získat tak hmotnost redukovanou  $m_{red}$  podle rovnice (3.1.15) a pro výpočet potenciální energie ještě tuhost daného nosníku  $k_0$ , kterou spočteme podle rovnice (3.1.17).

Pro redukovanou hmotnost musí platit podmínka

$$E_{kred} = \sum_i E_{ki} \quad (3.1.14)$$

$$\frac{1}{2} \cdot m_{red} \cdot v_0^2 = \frac{1}{2} \cdot \sum_i m_i \cdot v_i^2$$

$$m_{red} = \frac{\sum_i m_i \cdot v_i^2}{v_0^2} \quad (3.1.15)$$

Po vyčíslení dostaneme

$$m_{red} = 138,950 \text{ kg}$$

Pro výpočet kinetické energie použijeme rovnici

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot m_{red} \cdot v_0^2 \quad (3.1.16)$$

$$E_k = \frac{1}{2} \cdot 138,950 \cdot 42^2 = 122,554 \text{ kJ}$$

Pro výpočet potenciální energie potřebujeme ohybovou tuhost nosníku, kterou spočteme podle vztahu

$$k_o = \frac{48 \cdot E \cdot J_y}{L^3} \quad (3.1.17)$$

$$k_o = \frac{48 \cdot 210000 \cdot 1,958 \cdot 10^7}{1880^3} = 29702,956 \frac{N}{mm}$$

Výsledná potenciální energie se poté spočte dle vztahu

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot k_o \cdot \delta_{stat}^2 \quad (3.1.18)$$

$$E_p = \frac{1}{2} \cdot 29702,956 \cdot 5,294^2 = 0,416 \text{ kJ}$$

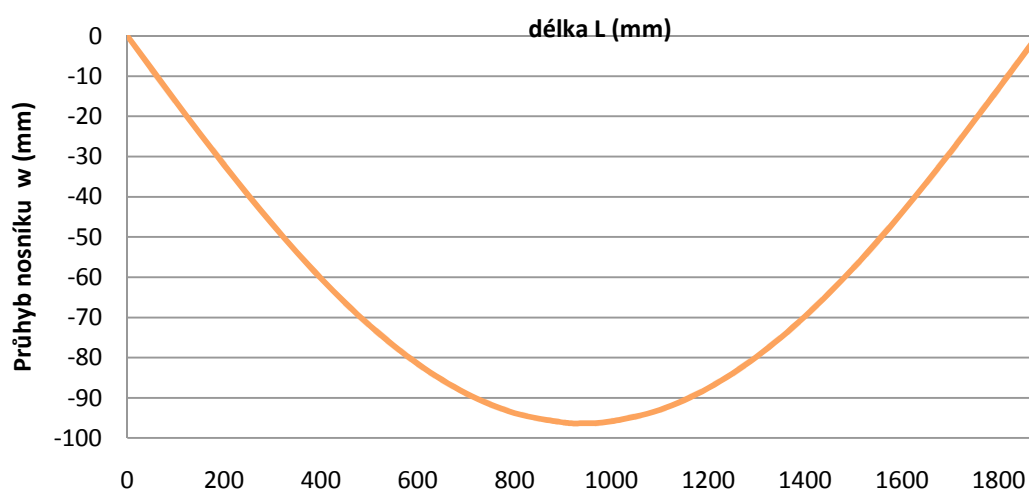
Když nyní všechny získané hodnoty dosadíme do rovnice (3.1.13) pro koeficient rázu  $k_{dyn}$  dostaneme

$$k_{dyn} = 1 + \sqrt{1 + \frac{E_k}{E_p}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{122,554}{0,416}} = 18,193$$

Výsledný průhyb  $\delta_{max}$  dostaneme z rovnice (3.1.1) použitím hodnot získaných z rovnic (3.1.12) a (3.1.13).

$$\delta_{max} = k_{dyn} \cdot \delta_{stat} = 18,193 \cdot (-5,294) = -96,314 \text{ mm}$$

Výsledný maximální průhyb získaný pomocí této teorie s využitím koeficientu rázu tedy bude  $\delta_{max} = -96,314 \text{ mm}$ . Průběh průhybu nosníku po délce nosníku je zakreslen na obrázku (Obr. 3.1.3). Tato teorie je ale velmi zjednodušená a používá se převážně pro prvotní odhad průhybu pro případné naddimenzování nosníku. Z tohoto důvodu i my budeme považovat tento výsledek jako prvotní přibližné přiblížení a výsledný maximální průhyb zpřesníme pomocí teorie pro příčný ráz při ohybu nosníku.



Obr. 3.1.3– průběh průhybu po délce

### 3.1.2 Průhyb podle teorie pro příčný ráz při ohybu nosníku

Tento výpočet bude probíhat podle teorie uvedené v kapitole 2.1.3.1. Podle této kapitoly spočteme průhyb způsobený nárazem nosníku rychlostí  $v_0$  na podpory AB a k němu následně přičteme průhyb od statického zatížení tlakem  $p$ .

Při výpočtu průhybu nosníku od nárazu na podpěry vyjdeme z rovnice (2.1.83).

$$w(x, t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \cdot [b_{nI} \cdot \sin(\omega_{nI} \cdot t) + b_{nII} \cdot \sin(\omega_{nII} \cdot t)] \quad (3.1.19)$$

Na začátku výpočtu je nutné nejdříve spočítat bezrozměrný koeficient  $k_f$ . Tento koeficient vychází z rovnice (2.1.60). Do této rovnice ještě potřebujeme zjistit tvar funkce  $f(z)$ , který určíme pomocí integrace rovnice (2.1.57). Tím dostaneme rovnici (3.1.20).

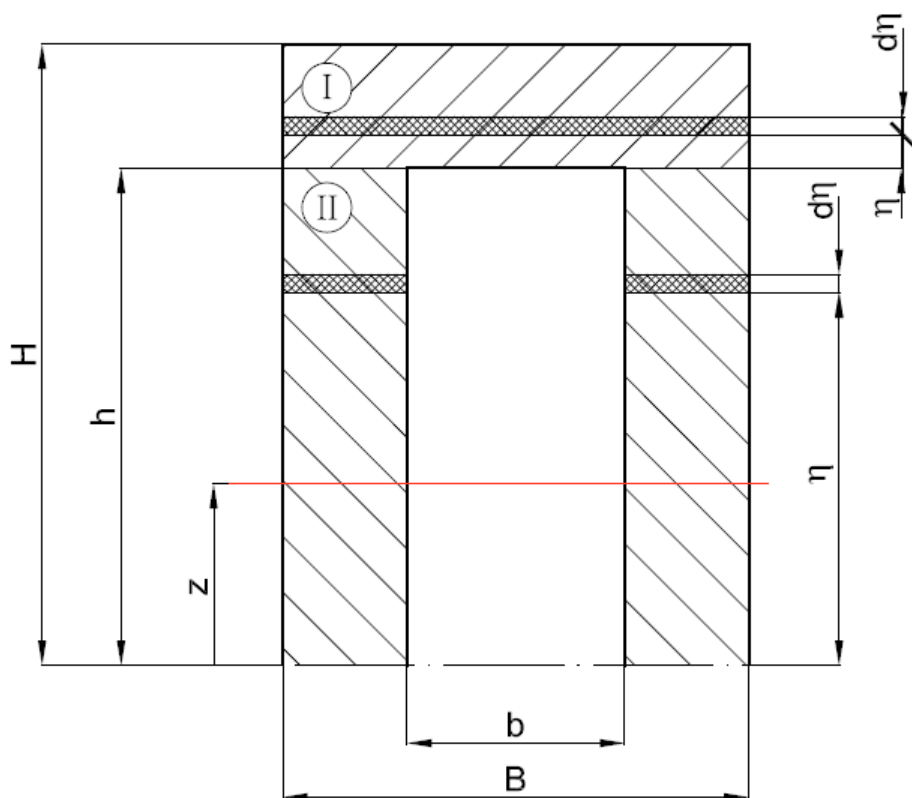
$$f(z) = \frac{S}{J_y \cdot B} \cdot \int_{(z)} S_{Ty} \cdot dz \quad (3.1.20)$$

Do rovnice (3.1.20) je potřeba ještě určit statický moment průřezu  $S_{Ty}$ . Pro výpočet statického momentu průřezu použijeme integrál (3.1.21), který určíme pomocí obrázku (Obr. 3.1.4). Průřez bude pro výpočet nutné rozdělit na dvě části, které budeme počítat samostatně a nakonec je sečteme.

$$S_{Ty} = \int b(\eta) \cdot \eta \cdot d\eta \quad (3.1.21)$$

$$S_{TyI} = \int_z^{\frac{H}{2}} B \cdot \eta \cdot d\eta = \frac{B \cdot (H^2 - 4 \cdot z^2)}{8} \quad (3.1.22)$$

$$S_{Ty2} = \int_z^{\frac{h}{2}} (B - b) \cdot \eta \cdot d\eta = \frac{(B-b) \cdot (h^2 - 4 \cdot z^2)}{8} \quad (3.1.23)$$



Obr. 3.1.4 – Rozdělení průřezu pro výpočet statického momentu

Pro první oblast (I) je  $z \in \langle \frac{h}{2}, \frac{H}{2} \rangle$  a pro druhou oblast (II) dosazujeme za  $z \in \langle 0, \frac{h}{2} \rangle$ .

Nyní z rovnice (3.1.20) určíme tvar funkce  $f(z)$  dosazením z rovnic (3.1.22) a (3.1.23). Z důvodu různých hodnot  $z$  musíme opět provést řešení odděleně.

Dostaneme pak vztahy

$$f(z)_I = \frac{S}{J_y \cdot B} \cdot \int_{(z)} S_{Ty1} \cdot dz = \frac{S}{J_y \cdot B} \cdot \int_{(z)} \left[ \frac{B \cdot (H^2 - 4 \cdot z^2)}{8} \right] \cdot dz \quad (3.1.24)$$

$$f(z)_I = -\frac{S}{J_y \cdot B} \cdot \left[ \frac{B \cdot z^3}{6} - \frac{B \cdot H^2 \cdot z}{8} \right]$$

$$f(z)_{II} = \frac{S}{J_y \cdot B} \cdot \int_{(z)} S_{Ty2} \cdot dz = \frac{S}{J_y \cdot B} \cdot \int_{(z)} \frac{(B-b) \cdot (h^2 - 4 \cdot z^2)}{8} \cdot dz \quad (3.1.25)$$

$$f(z)_{II} = \frac{S}{J_y \cdot B} \cdot \left[ z \cdot \left( \frac{B \cdot h^2}{8} - \frac{b \cdot h^2}{8} \right) - z^3 \cdot \left( \frac{B}{6} - \frac{b}{6} \right) \right]$$

Nyní z rovnice (2.1.60) můžeme určit jednotlivé koeficienty  $k_f$ .

$$k_f = \frac{1}{J_y} \cdot \int_{(S)} f(z) \cdot z \cdot dS \quad (3.1.26)$$

Do rovnice (3.1.26) dosadíme za  $A$  a  $dA$  pro jednotlivé části

$$\begin{array}{ll} \text{I:} & S = B \cdot z \\ & dS = B \cdot dz \\ \text{II:} & S = (B - b) \cdot z \\ & dS = (B - b) \cdot z \end{array}$$

Dostaneme potom vztahy

$$k_{fI} = \frac{1}{J_y} \cdot \int_{(z)} - \frac{B \cdot z \cdot \left( \frac{B \cdot z^3}{6} - \frac{B \cdot H^2 \cdot z}{8} \right)}{B \cdot J_y} \cdot z \cdot B \cdot dz \quad (3.1.27)$$

$$k_{fI} = \left[ - \frac{\frac{B^2 \cdot z^6}{36 \cdot J_y} - \frac{B^2 \cdot H^2 \cdot z^4}{32 \cdot J_y}}{J_y} \right]_{\frac{h}{2}}^{\frac{H}{2}} = 1,889$$

$$k_{fII} = \frac{1}{J_y} \cdot \int_{(z)} \frac{(B-b) \cdot z \cdot \left[ z \cdot \left( \frac{B \cdot h^2}{8} - \frac{b \cdot h^2}{8} \right) - z^3 \cdot \left( \frac{B}{6} - \frac{b}{6} \right) \right]}{B \cdot J_y} \cdot z \cdot (B - b) \cdot dz \quad (3.1.28)$$

$$k_{fII} = \frac{\frac{z^4 \cdot (B^3 \cdot h^2 - 3 \cdot B^2 \cdot b \cdot h^2 + 3 \cdot B \cdot b^2 \cdot h^2)}{32 \cdot B \cdot J_y} - \frac{z^6 \cdot (B^3 - 3 \cdot B^2 \cdot b + 3 \cdot B \cdot b^2 - b^3)}{36 \cdot B \cdot J_y}}{J_y} = 7,73 \times 10^{-4}$$

Výsledný bezrozměrný koeficient získáme součtem jednotlivých koeficientů  $k_{fI}$  a  $k_{fII}$  dle rovnice (3.1.29).

$$k_f = k_{fI} + k_{fII} \quad (3.1.29)$$

$$k_f = 1,889 + 7,73 \times 10^{-4} = 1,889$$

Pro řešení rovnic bychom měli uvažovat  $n = 1, 2, \dots, \infty$ , ale protože se jedná o rozvoj do řady, kdy se hodnoty stále snižují, budeme tedy uvažovat prvních pár hodnot tedy  $n = 1, 2, \dots, 20$ . Přičemž každé hodnotě  $n$  odpovídají dvě vlastní kruhové frekvence podle rovnic (2.1.70) a (2.1.71).

$$\omega_{nI} = \omega_0 \cdot \frac{n \cdot \lambda}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[ 1 + \alpha^2 + \frac{\alpha^2 \cdot \lambda^2}{n^2 \cdot \pi^2} - \sqrt{\left( 1 + \alpha^2 + \frac{\alpha^2 \cdot \lambda^2}{n^2 \cdot \pi^2} \right) - 4 \cdot \alpha^2} \right]} \quad (3.1.30)$$

$$\omega_{nII} = \omega_0 \cdot \frac{n \cdot \lambda}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[ 1 + \alpha^2 + \frac{\alpha^2 \cdot \lambda^2}{n^2 \cdot \pi^2} + \sqrt{\left( 1 + \alpha^2 + \frac{\alpha^2 \cdot \lambda^2}{n^2 \cdot \pi^2} \right) - 4 \cdot \alpha^2} \right]} \quad (3.1.31)$$

Do rovnic (3.1.30) a (3.1.31) potřebujeme ještě první vlastní uhlovou frekvenci  $\omega_0$  dle rovnice (2.1.72), štíhlost nosníku  $\lambda$  dle rovnice (2.1.73) a součinitel  $\alpha$  dle rovnice (2.1.74).

$$\omega_0 = \frac{\pi^2}{L^2} \cdot \sqrt{\frac{E \cdot J_y}{\rho \cdot S}} = \frac{\pi^2}{1880^2} \cdot \sqrt{\frac{210000 \cdot 1,958 \times 10^7}{7850 \times 10^{-3} \cdot 5980}} = 826,53 \left[ \frac{rad}{s} \right] \quad (3.1.32)$$

$$\lambda = \frac{L}{\sqrt{\frac{J_y}{S}}} = \frac{1880}{\sqrt{\frac{1,958 \times 10^7}{5980}}} = 32,852 [-] \quad (3.1.33)$$

$$\alpha^2 = \frac{G}{k_f \cdot E} = \frac{81000}{1,889 \cdot 210000} = 0,204 [-] \quad (3.1.34)$$

Dosazením do rovnic (3.1.30) a (3.1.31) dostaneme vlastní kruhové frekvence, které pro jednotlivé hodnoty  $n$  jsou zapsané v tabulce (Tab.3.1.1).



n	$\omega_{nI} [s^{-1}]$	$\omega_{nII} [s^{-1}]$	n	$\omega_{nI} [s^{-1}]$	$\omega_{nII} [s^{-1}]$
1	805,249	41913,834	11	38865,588	105076,216
2	3005,113	44924,836	12	43007,102	113008,114
3	6150,439	49388,256	13	47128,412	121029,493
4	9843,254	54861,615	14	51230,980	129125,116
5	13824,739	61033,795	15	55316,328	137282,914
6	17946,725	67702,483	16	59386,059	145493,227
7	22128,724	74735,512	17	63441,729	153748,238
8	26328,253	82043,701	18	67484,787	162041,570
9	30523,596	89564,652	19	71516,551	170367,971
10	34704,276	97253,295	20	75538,204	178723,083

Tab. 3.1.1 – vlastní kruhové frekvence

Uvažujme nyní, že pro moment nárazu v čase  $t = 0$  budou platit počáteční podmínky (3.1.35) dostaneme pro koeficienty z rovnice (3.1.19) vztahy

$$w(x, 0) = 0, \quad \vartheta(x, 0) = 0, \quad \left[ \frac{d\vartheta}{dt} \right]_{t=0} = 0, \quad \left[ \frac{dw}{dt} \right]_{t=0} = v_0 \quad (3.1.35)$$

$$a_{nI} = a_{nII} = c_{nI} = c_{nII} = 0 \quad (3.1.36)$$

Pro sudé hodnoty  $n$

$$b_{nI} = b_{nII} = d_{nI} = d_{nII} = 0 \quad (3.1.37)$$

a pro liché hodnoty  $n$  musí platit vztahy

$$b_{nI} = \frac{4 \cdot v_0}{\pi \cdot \omega_0} \cdot \frac{\omega_0}{n \cdot \omega_{nI}} \cdot \frac{e_{nII}}{e_{nII} - e_{nI}}$$

$$b_{nII} = \frac{4 \cdot v_0}{\pi \cdot \omega_0} \cdot \frac{\omega_0}{n \cdot \omega_{nII}} \cdot \frac{e_{nI}}{e_{nI} - e_{nII}}$$

$$d_{nI} = \frac{4 \cdot v_0}{L \cdot \omega_0} \cdot \frac{\omega_0}{n \cdot \omega_{nI}} \cdot \frac{e_{nI} \cdot e_{nII}}{e_{nII} - e_{nI}}$$

$$d_{nII} = \frac{4 \cdot v_0}{L \cdot \omega_0} \cdot \frac{\omega_0}{n \cdot \omega_{nII}} \cdot \frac{e_{nI} \cdot e_{nII}}{e_{nI} - e_{nII}} \quad (3.1.38)$$

kde za  $e_{nI}$  a  $e_{nII}$  dosadíme

$$e_{nI} = 1 - \left( \frac{\omega_{nI}}{\omega_0} \right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{\alpha^2 \cdot n^2 \cdot \lambda^2}$$

$$e_{nII} = 1 - \left( \frac{\omega_{nII}}{\omega_0} \right)^2 \cdot \frac{\pi^2}{\alpha^2 \cdot n^2 \cdot \lambda^2} \quad (3.1.39)$$

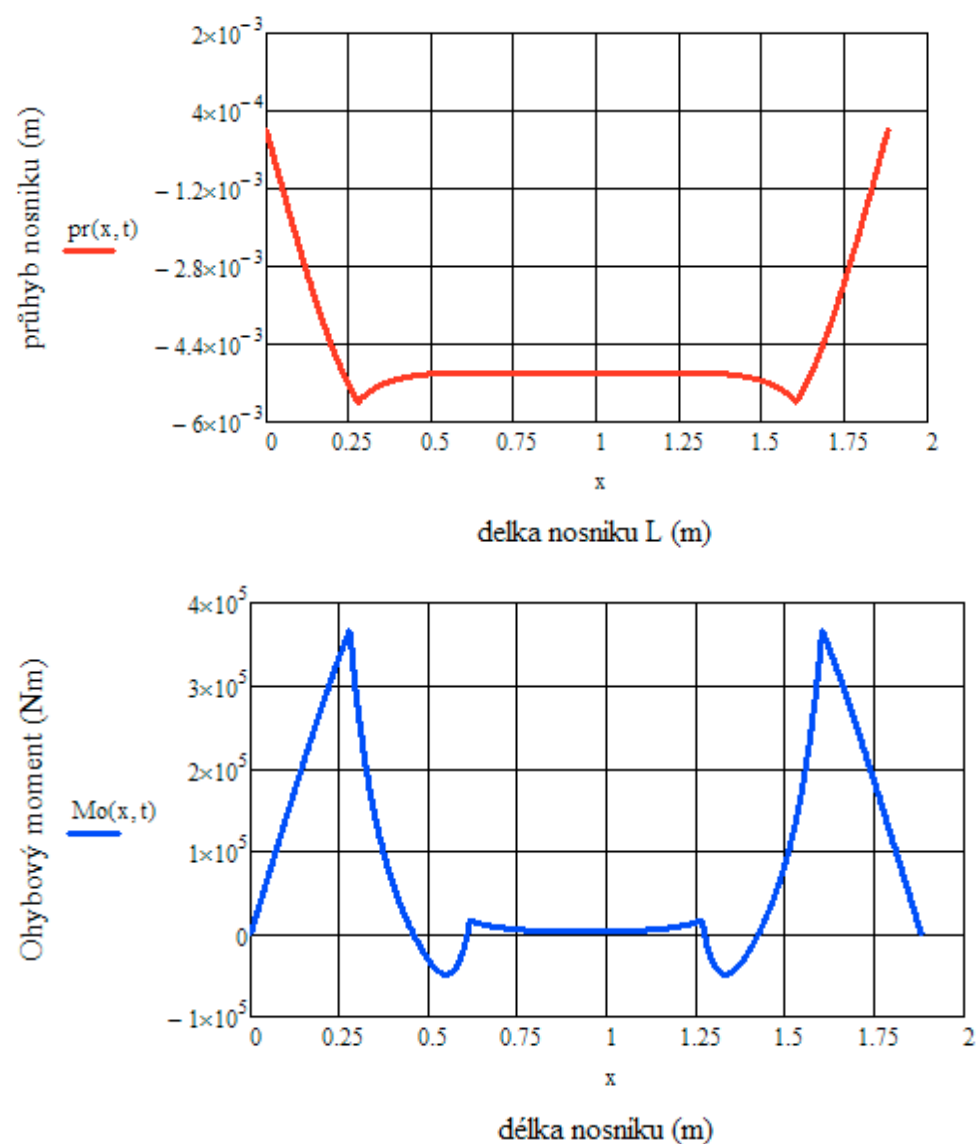
Výsledný průhyb způsobený nárazem rychlostí  $v_0$  pak bude záviset na čase  $t_i$  spočteným podle vztahu (3.1.40). Z grafů 3.11 až 3.1.10 vidíme, průběh deformační vlny po délce nosníku a v závislosti na něm průhyb a ohybový moment. Jednotlivé časy a koeficienty  $n$  jsou uvedeny v tabulce (Tab. 3.1.2).

$$t_i = \frac{n \cdot \pi}{32 \cdot \omega_0} \quad (3.1.40)$$

$i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$n$	1	2	4	6	8	10	12	14	16	18
$t_i$	$\frac{1 \cdot \pi}{32 \cdot \omega_0}$	$\frac{1 \cdot \pi}{16 \cdot \omega_0}$	$\frac{1 \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0}$	$\frac{3 \cdot \pi}{16 \cdot \omega_0}$	$\frac{1 \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0}$	$\frac{5 \cdot \pi}{16 \cdot \omega_0}$	$\frac{3 \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0}$	$\frac{7 \cdot \pi}{16 \cdot \omega_0}$	$\frac{1 \cdot \pi}{2 \cdot \omega_0}$	$\frac{9 \cdot \pi}{16 \cdot \omega_0}$

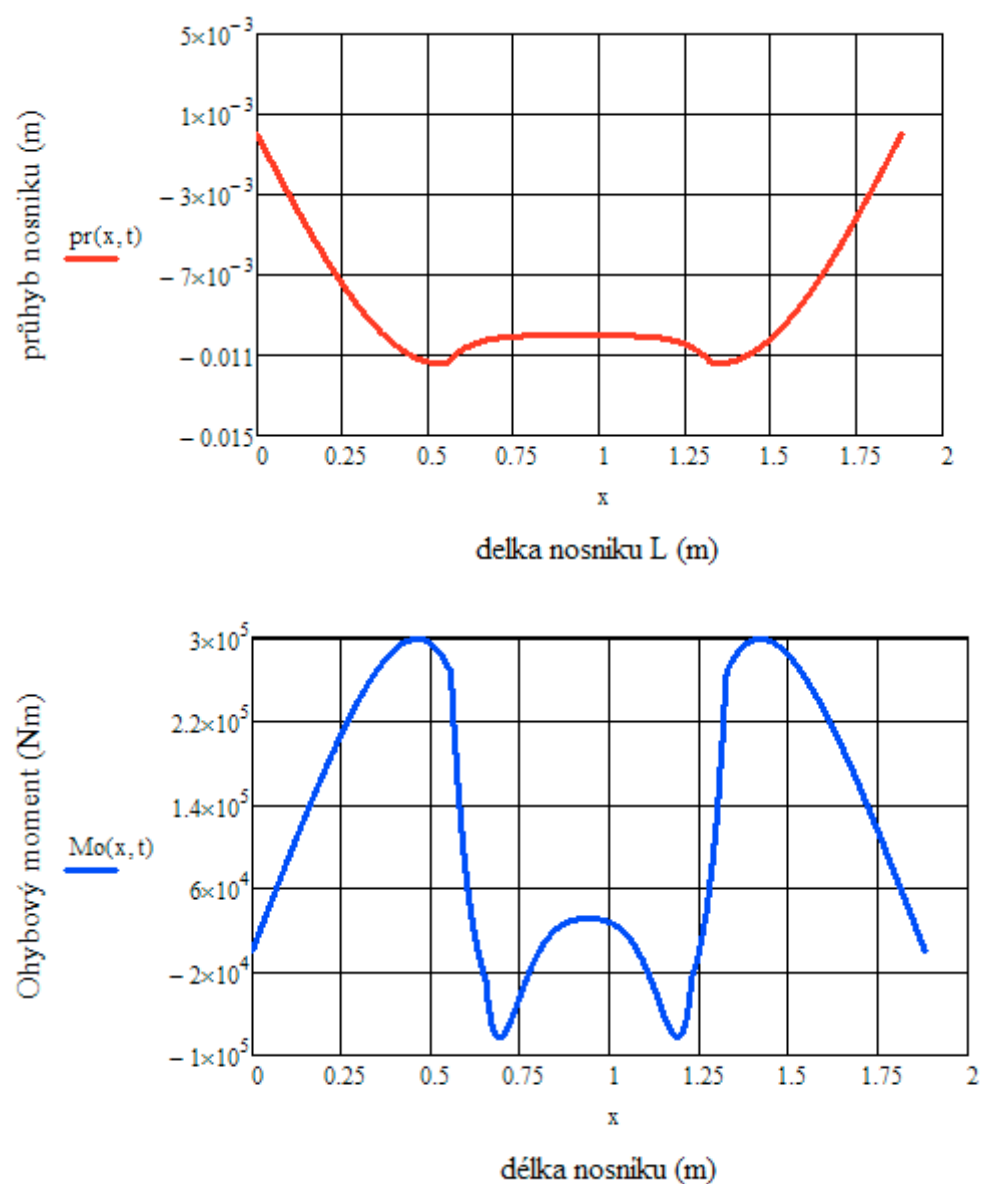
Tab. 3.1.2 – časové okamžiky pro sledování průběhu rázu

$$\text{čas: } t_1 = \frac{1 \cdot \pi}{32 \cdot \omega_0}$$



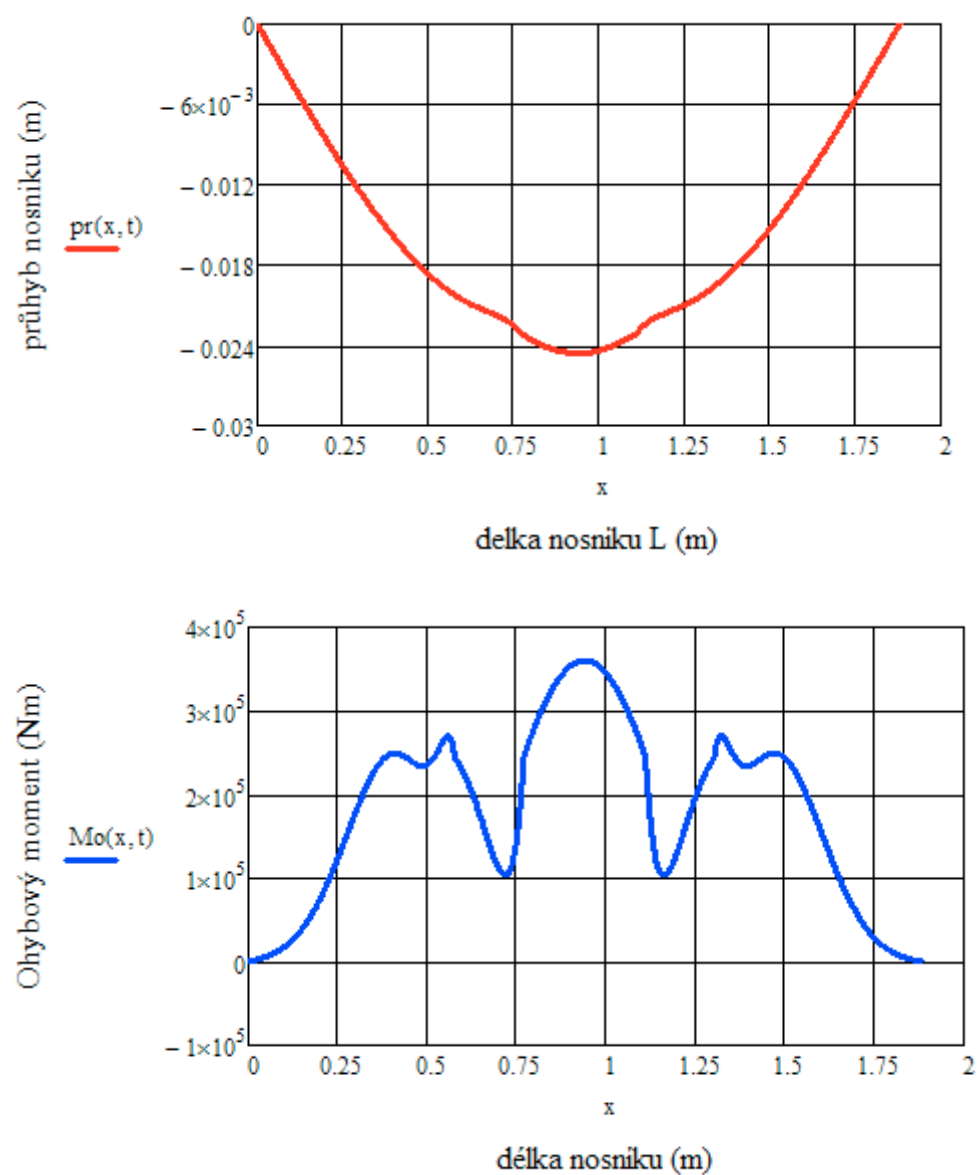
Graf 3.1.1 – průběhu průhybu a ohybového momentu po délce nosníku v čase  $t_1$

$$\text{čas: } t_2 = \frac{1 \cdot \pi}{16 \cdot \omega_0}$$



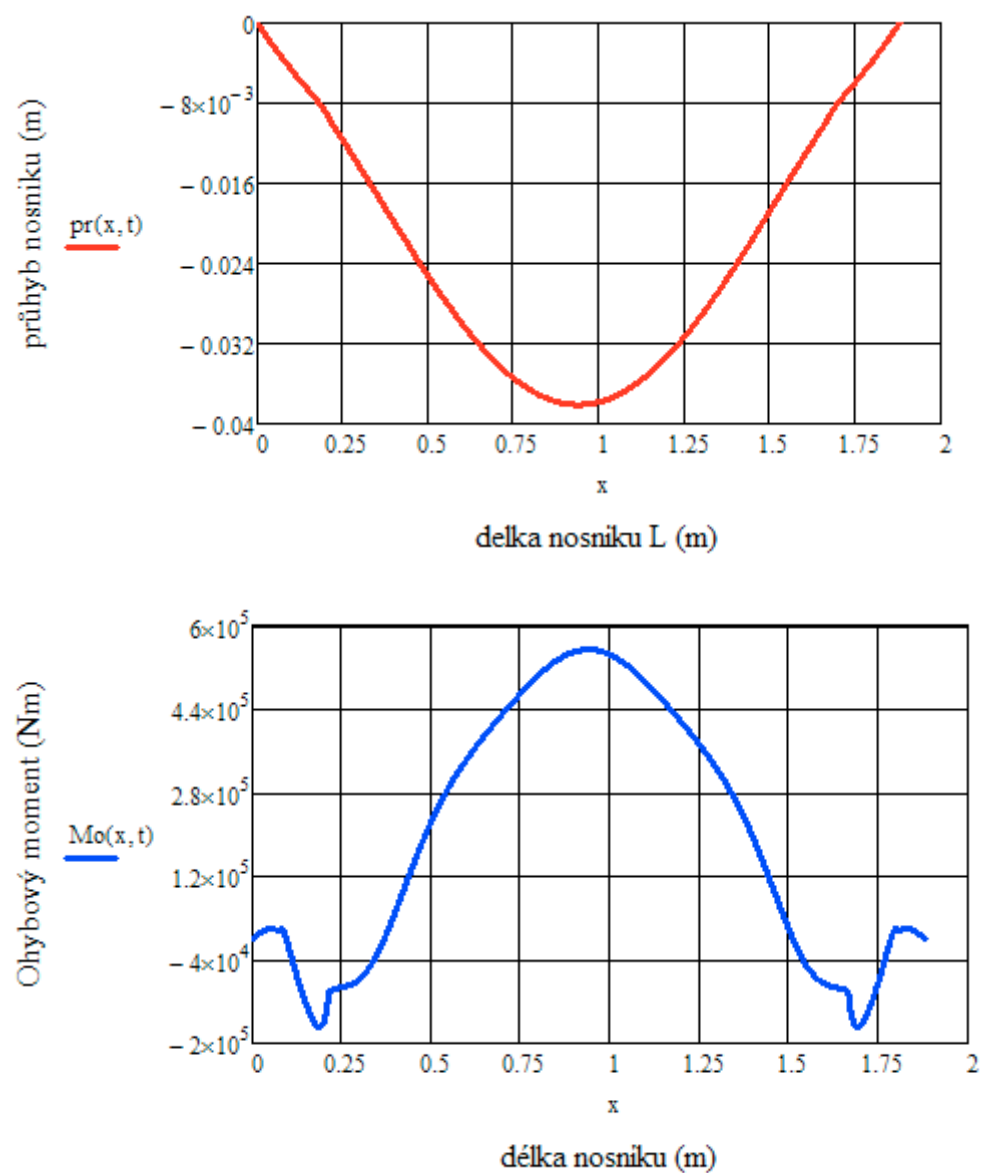
Graf 3.1.2 – průběhu průhybu a ohybového momentu po délce nosníku v čase  $t_2$

$$\text{čas: } t_3 = \frac{1 \cdot \pi}{8 \cdot \omega_0}$$



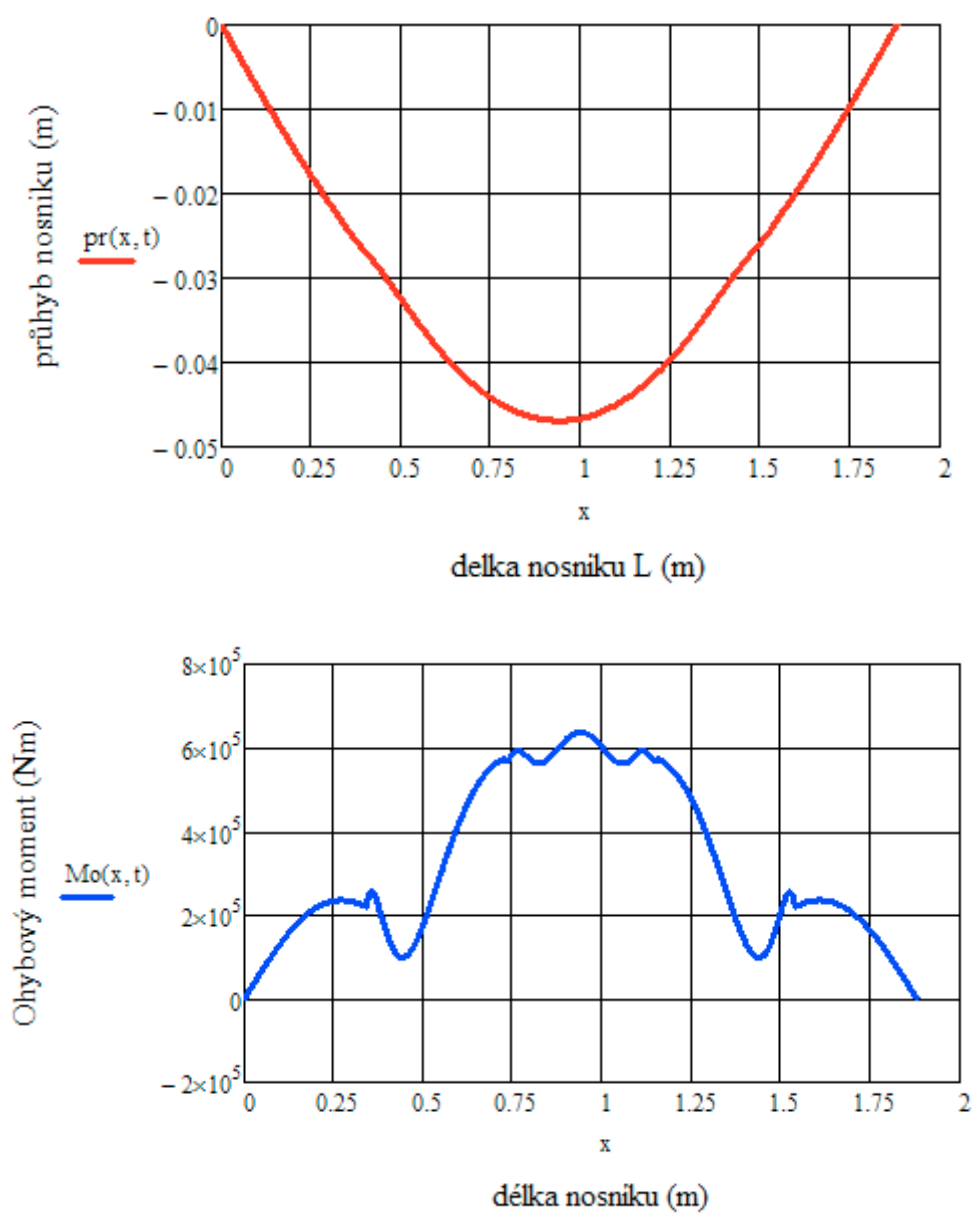
Graf 3.1.3 – průběhu průhybu a ohybového momentu po délce nosníku v čase  $t_3$

$$\text{čas: } t_4 = \frac{3 \cdot \pi}{16 \cdot \omega_0}$$



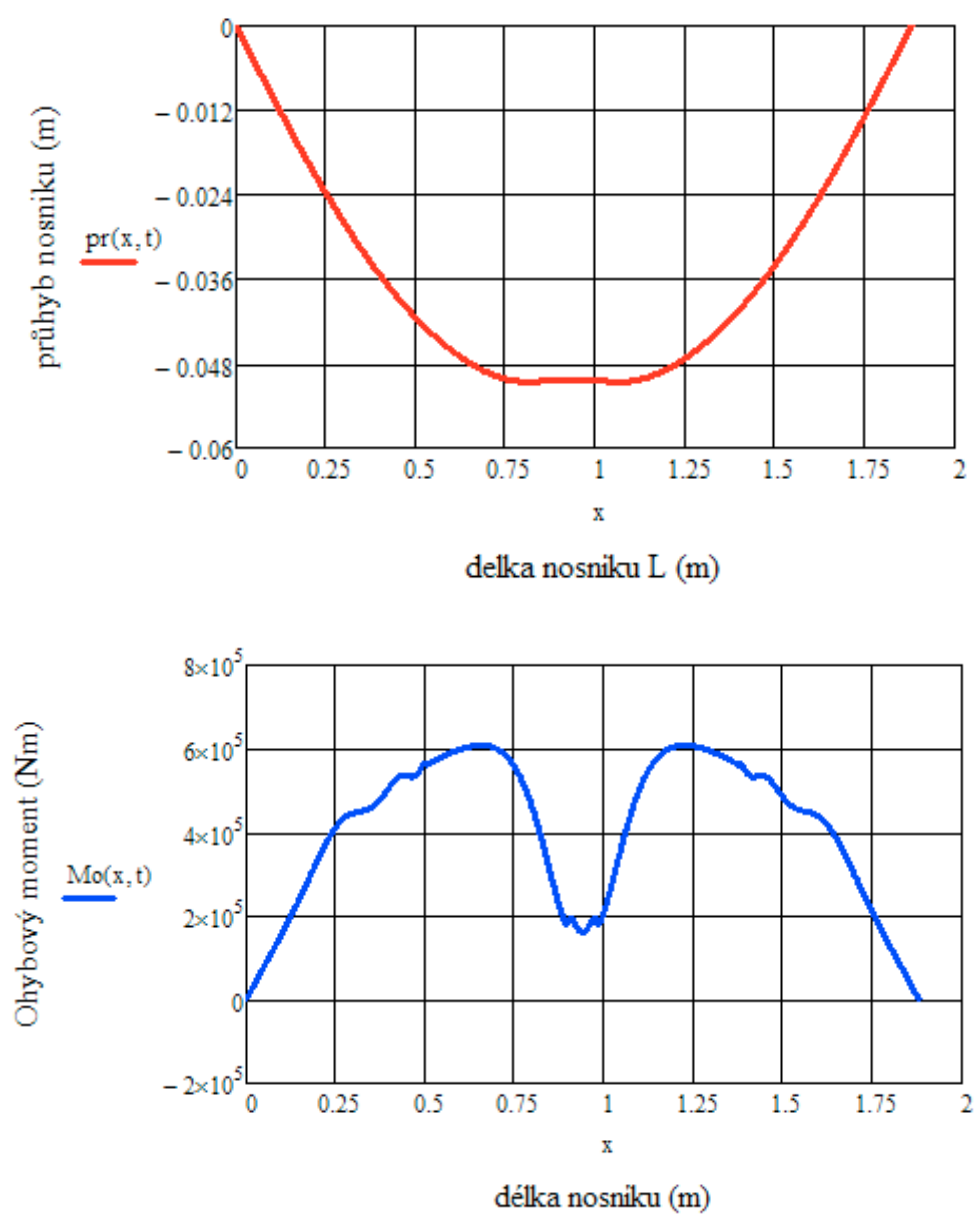
Graf 3.1.4 – průběhu průhybu a ohybového momentu po délce nosníku v čase  $t_4$

$$\text{čas: } t_5 = \frac{1 \cdot \pi}{4 \cdot \omega_0}$$



Graf 3.1.5 – průběhu průhybu a ohybového momentu po délce nosníku v čase  $t_5$

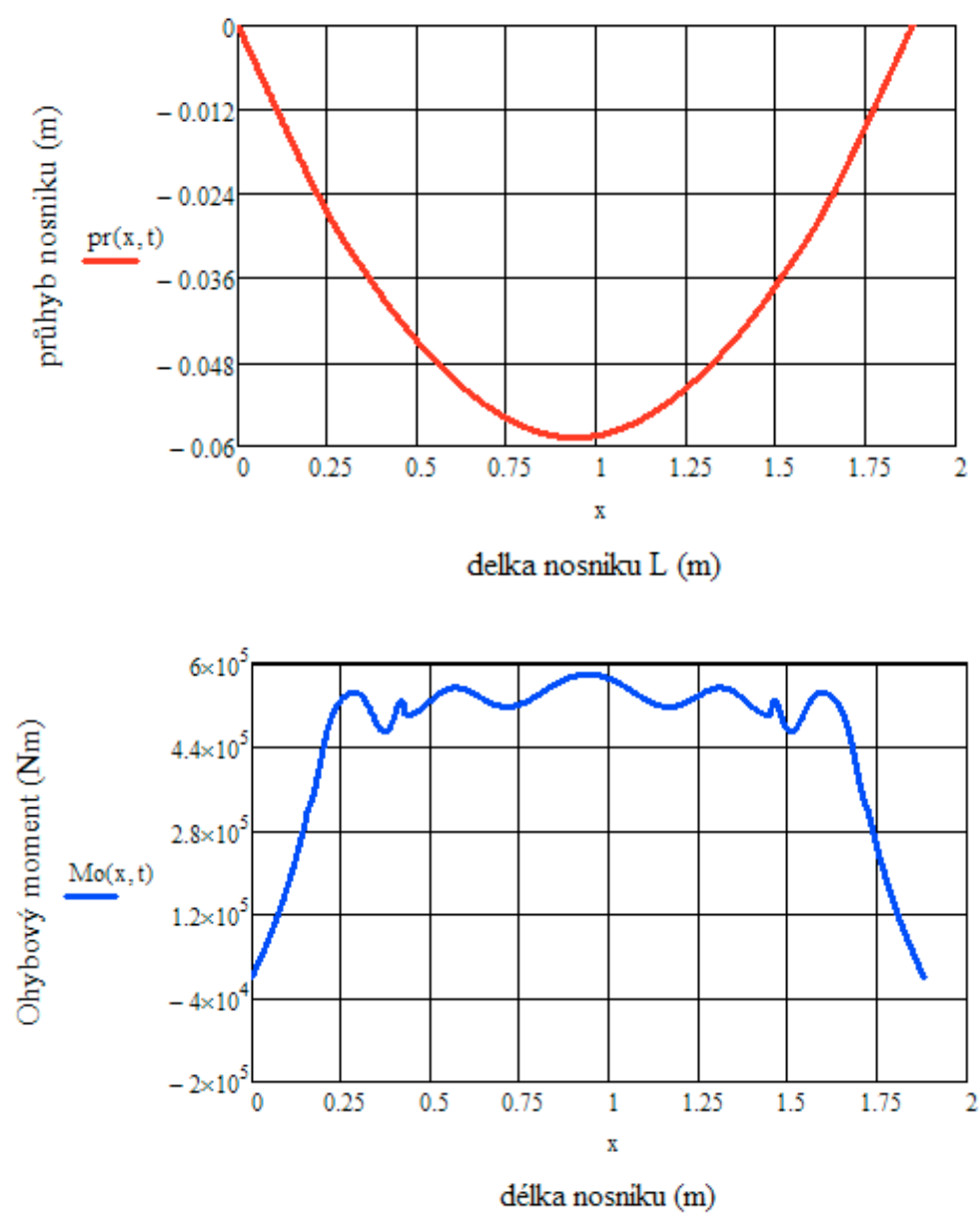
$$\text{čas: } t_6 = \frac{5 \cdot \pi}{16 \cdot \omega_0}$$



Graf 3.1.6 – průběhu průhybu a ohybového momentu po délce nosníku v čase  $t_6$

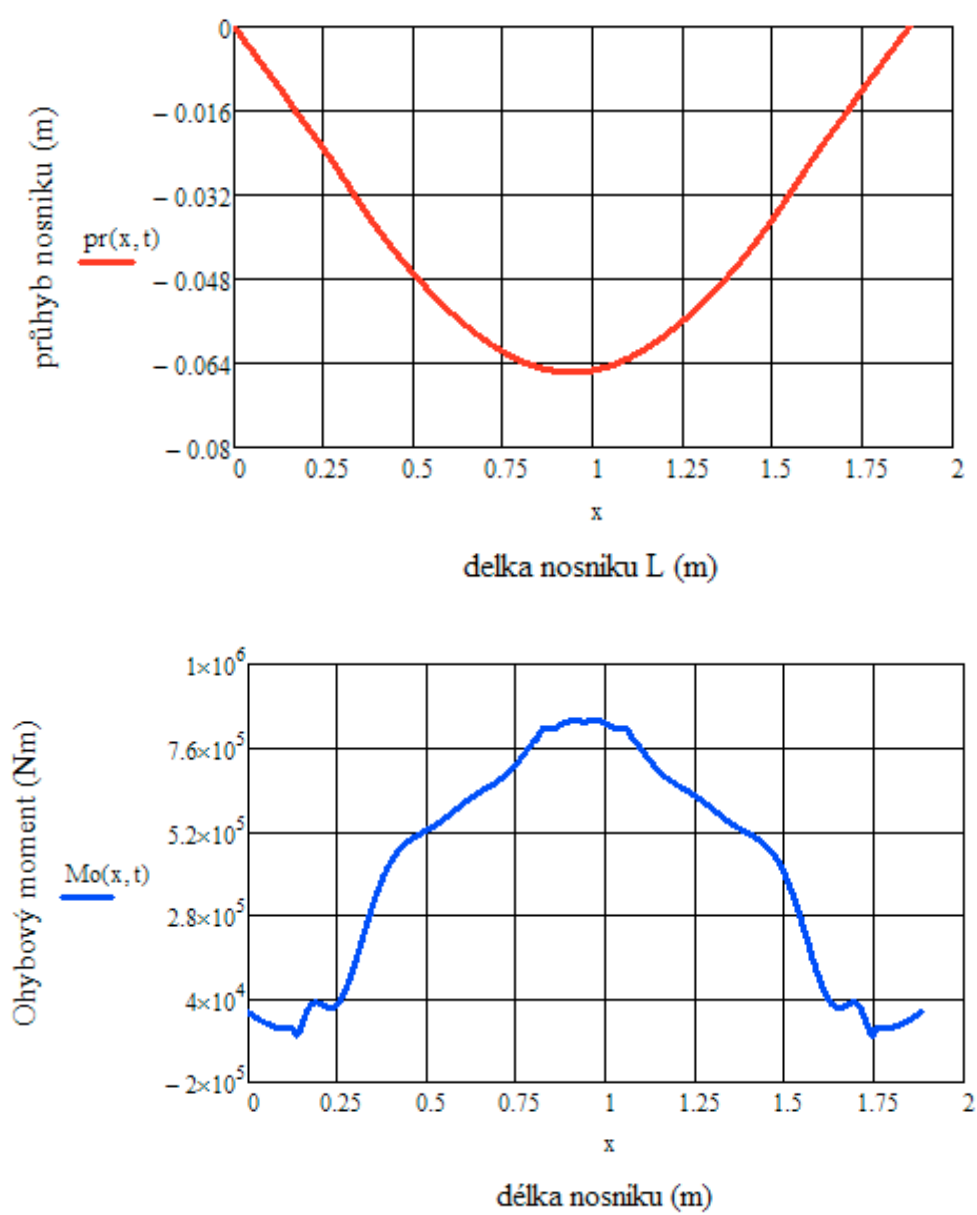


$$\text{čas: } t_7 = \frac{5 \cdot \pi}{16 \cdot \omega_0}$$



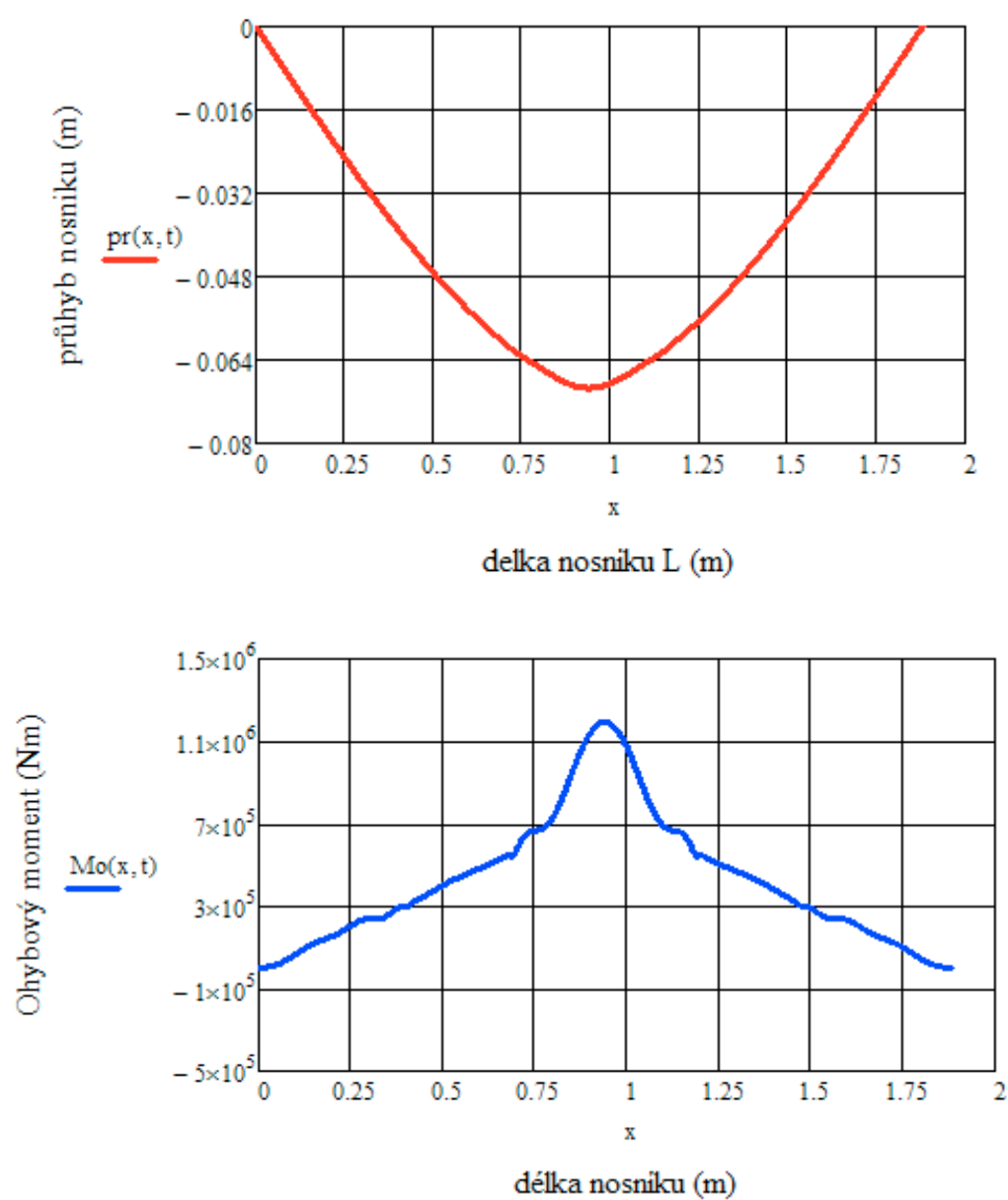
Graf 3.1.7 – průběhu průhybu a ohybového momentu po délce nosníku v čase  $t_7$

$$\text{čas: } t_8 = \frac{7 \cdot \pi}{16 \cdot \omega_0}$$



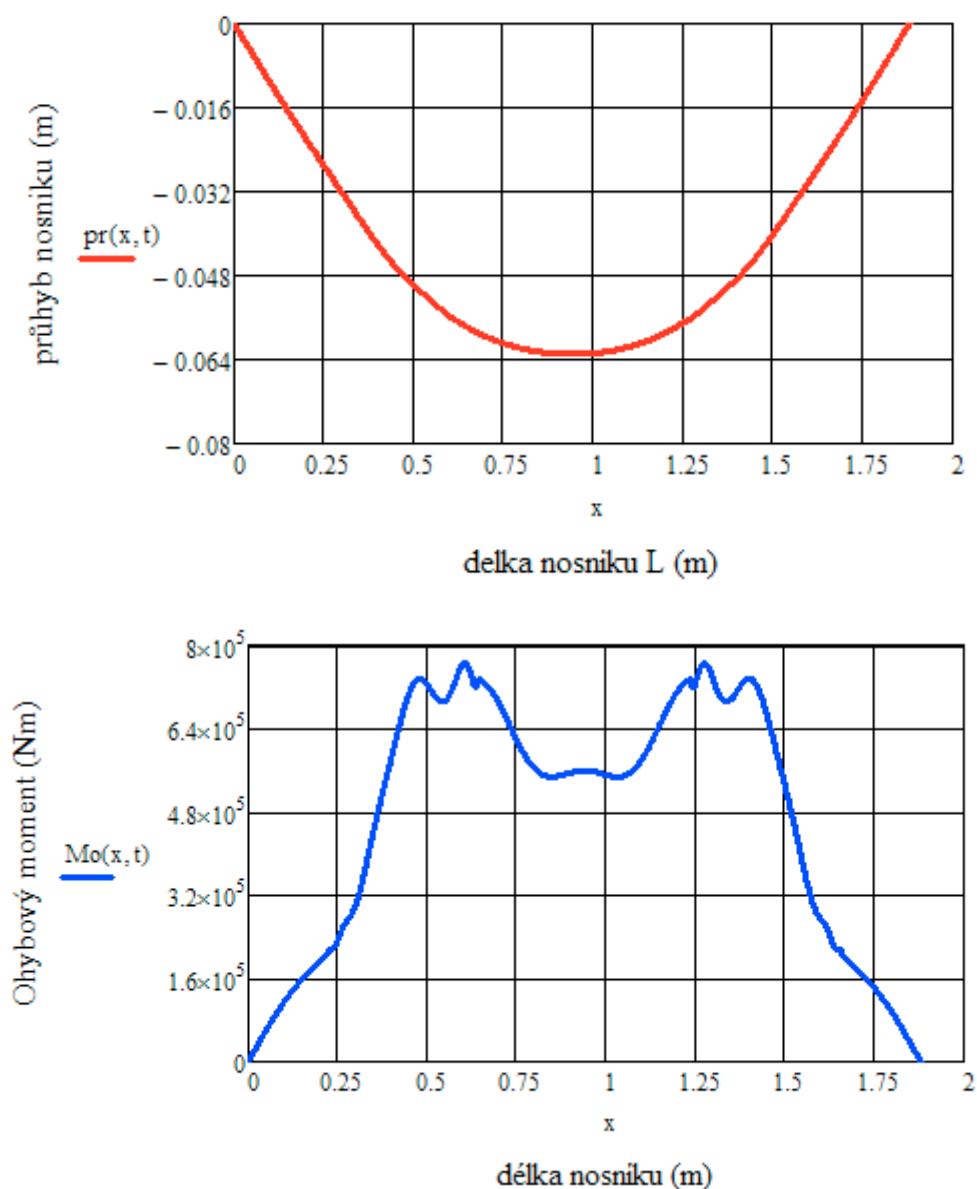
Graf 3.1.8 – průběhu průhybu a ohybového momentu po délce nosníku v čase  $t_8$

$$\text{čas: } t_9 = \frac{1 \cdot \pi}{2 \cdot \omega_0}$$



Graf 3.1.9 – průběhu průhybu a ohybového momentu po délce nosníku v čase  $t_9$

$$\text{čas: } t_{10} = \frac{9 \cdot \pi}{16 \cdot \omega_0}$$



Graf 3.1.10 – průběhu průhybu a ohybového momentu po délce nosníku v čase  $t_{10}$

Z grafů také vidíme, že maximální průhyb nastává v čase  $t_9$ . Tento maximální průhyb nosníku pak vypočteme podle vztahu (3.1.19).

$$w(x, t) = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \cdot [b_{nI} \cdot \sin(\omega_{nI} \cdot t) + b_{nII} \cdot \sin(\omega_{nII} \cdot t)]$$

$$w_{dyn} = 69,414 \text{ [mm]}$$

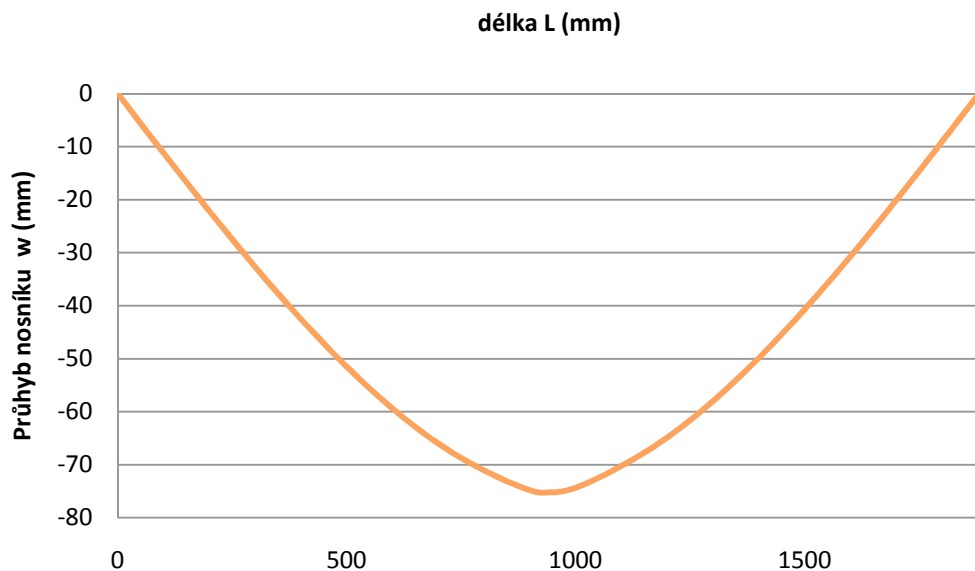
Celkový maximální průhyb pak získáme přičtením statického průhybu  $\delta_{stat}$  od tlaku p (3.1.12).

$$\delta_{max} = \delta_{stat} + w_{dyn} \quad (3.1.40)$$

$$\delta_{max} = 5,294 + 69,414 = 74,708 \text{ [mm]}$$

Výsledný maximální průhyb získaný pomocí této teorie pro příčný ráz při ohybu nosníku tedy je  $\delta_{max} = 74,708 \text{ mm}$ . Průběh průhybu nosníku po délce nosníku získaný touto teorií je vykreslen na obrázku (Obr. 3.1.12).

I přestože je tato teorie přesnější než předešlá teorie s využitím koeficientu rázu  $k_{dyn}$ , tak i ona není dokonale přesná, protože zanedbává vliv plastické deformace, která jistě při tomto zatížení nastane. Dané výsledky získané touto teorií pro příčný ráz nosníku při ohybu založenou na teorii šíření napět'ových vln, ale můžeme i přesto považovat pro naši práci za dostatečně přesné.



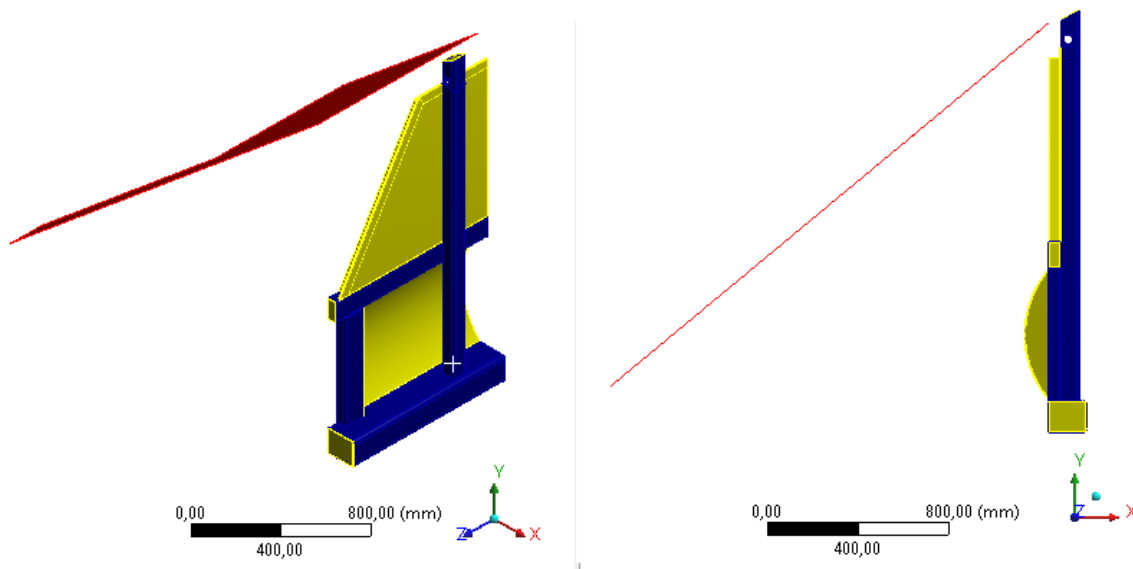
Obr. 3.1.12– průběh průhybu po délce nosníku

## 3.2 Numerické řešení pomocí MKP

Numerické řešení bude provedeno pomocí MKP programu AUTODYN, kde použijeme nastavení pro explicitní výpočet.

### 3.2.1 Geometrický model

Model hrázových dveří se skládá ze zjednodušeného skořepinového modelu samotných dveří a z rámu dveří. Úhel mezi hrázovými dveřmi a rámem dveří je  $50^\circ$ . Modelovat budeme pouze jednu polovinu dveří, protože využijeme symetrie modelu. Geometrický model dveří je zobrazen na obrázku (Obr. 3.2.2).

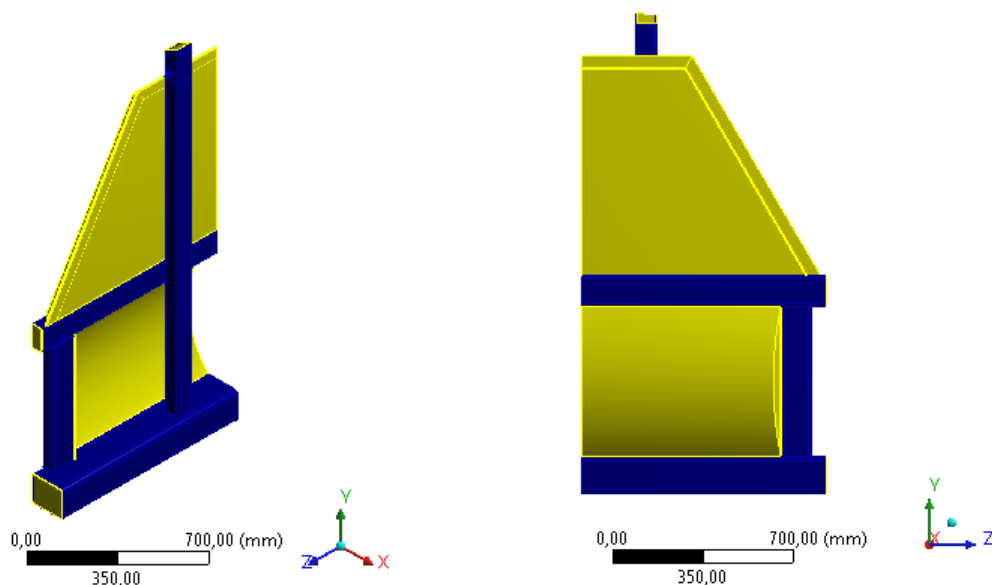


Obr. 3.2.1 – Geometrický model

### 3.2.2 Materiálové vlastnosti

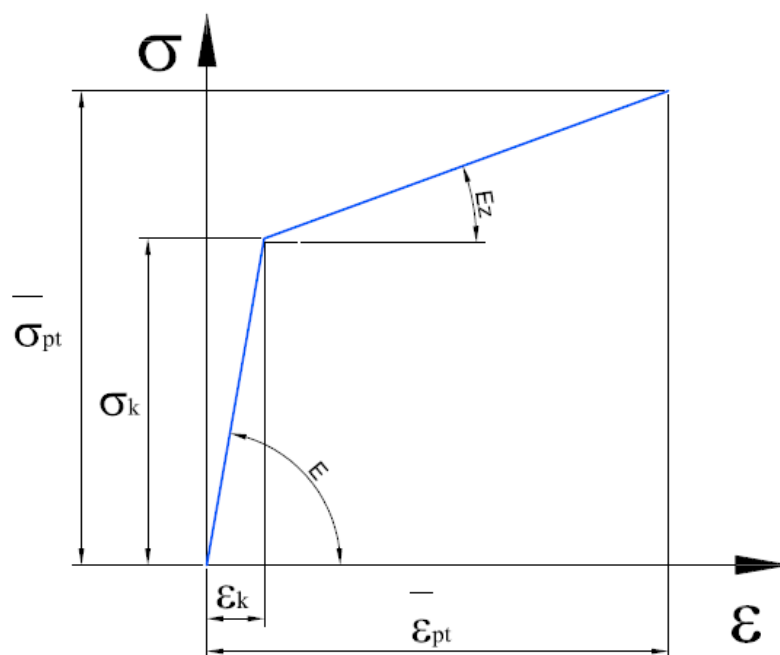
Na výrobu hrázových dveří byla použita ocel. Přesněji se jedná o dva druhy oceli 11375 (DIN RST 37 - 2) a 11523 (DIN ST 52 – 3). Přiřazení materiálu jednotlivým částem je vidět na obrázku (Obr. 3.2.2).

■ OCEL 11375  
■ OCEL 11523



Obr. 3.3.2 – Přiřazení materiálu

Při zadávání materiálových vlastností námi zvolených materiálu je nutné zadávat skutečné meze napětí a proto je potřeba nejprve tyto skutečné meze zjistit. Na jejich zjištění použijeme aproximaci pracovního diagramu pomocí lomené přímky  $t_p$  (viz kapitola 2.2.1.2). Tato aproximace je zobrazena na obrázku (Obr. 3.2.3).



Obr. 3.2.3 – aproximace pracovního diagramu lomenou přímkou

Nejprve jsme si pro tyto dva materiály našli v materiálových listech [23] chemické složení (Tab. 3.2.1) a základní materiálové vlastnosti (Tab. 3.2.2).

Materiál	C [%]	max. Mn [%]	max. Si [%]	max. P [%]	max. S [%]	max. N [%]
11375	0,230	1,500	0,000	0,045	0,045	0,014
11523	0,240	1,700	0,600	0,050	0,050	0,011

Tab. 3.2.1 – chemické složení materiálu

Materiál	Smluvní mez kluzu min. Re [MPa]	Smluvní mez pevnosti Rm [MPa]	Tažnost A [%]	Nárazová práce KV [J] při 20°C
11375	185	340 – 490	21	27
11523	285	450 – 600	17	27

Tab. 3.2.2 – materiálové vlastnosti

### Aproximace pracovního diagramu pro ocel 11375

K vlastnostem materiálu vypsanych k tabulce (Tab. 3.2.2) potřebujeme ještě Youngův modul pružnosti v tahu pro ocel  $E = 210000 \text{ MPa}$ .

Vyděme nyní z obrázku (Obr. 3.2.3) pro určení úhlu  $E_z$  jehož pomocí nahradíme křivku popisující plastickou oblast pracovního diagramu. Dostaneme tedy vztah

$$\tan E_z = \frac{\bar{\sigma}_{pt} - \sigma_k}{\bar{\varepsilon}_{pt} - \varepsilon_k} \quad (3.2.1)$$

Z Hookova zákona popsaného rovnicí (2.2.11) určíme poměrné prodloužení na mezi kluzu  $\varepsilon_k$ .

$$\varepsilon_k = \frac{\sigma_k}{E} = \frac{Re}{E} = \frac{185}{210000} = 0,881 \cdot 10^{-3} [-] \quad (3.2.2)$$



Dále si určíme pomocí rovnice (2.2.26) a poměru získaného z tabulky (Tab. 2.2.1) skutečné napětí na mezi pevnosti  $\bar{\sigma}_{pt}$ .

$$\bar{\sigma}_{pt} = \sigma_{pt} \cdot \frac{S_0}{S_p} = Rm \cdot \frac{S_0}{S_p} = 415 \cdot 1,15 = 477,25 [MPa] \quad (3.2.3)$$

Nyní pomocí rovnice (2.2.24) získáme poměrné prodloužení na mezi pevnosti  $\varepsilon_{pt}$  a z něj pomocí rovnice (2.2.15) získáme poměrné prodloužení na skutečné mezi pevnosti  $\bar{\varepsilon}_{pt}$ .

$$\bar{\sigma}_{pt} = Rm \cdot (1 + \varepsilon_{pt}) \rightarrow \varepsilon_{pt} \quad (3.2.4)$$

$$\varepsilon_{pt} = \frac{\bar{\sigma}_{pt}}{Rm} - 1 = \frac{477,25}{415} - 1 = 0,15 [-] \quad (3.2.5)$$

$$\bar{\varepsilon}_{pt} = \ln(1 + \varepsilon_{pt}) = \ln(1 + 0,15) = 0,139 [-] \quad (3.2.6)$$

Dosadíme-li nyní všechny výše získané hodnoty do rovnice (3.2.1) můžeme určit úhel  $E_z$ .

$$\tan E_z = \frac{477,25 - 185}{0,139 - 0,881 \cdot 10^{-3}} = 2115,929 [MPa] \quad (3.2.7)$$

### Aproximace pracovního diagramu pro ocel 11523

Vyjděme opět z obrázku (Obr. 3.2.3) pro určení úhlu  $E_z$  jehož pomocí nahradíme křivku popisující plastickou oblast pracovního diagramu. Postup je stejný jako pro ocel 11375.

Z Hookova zákona popsaného rovnicí (2.2.11) určíme poměrné prodloužení na mezi kluzu  $\varepsilon_k$ .

$$\varepsilon_k = \frac{\sigma_k}{E} = \frac{Re}{E} = \frac{285}{210000} = 1,357 \cdot 10^{-3} [-] \quad (3.2.8)$$

Dále si určíme pomocí rovnice (2.2.26) a poměru získaného z tabulky (Tab. 2.2.1) skutečné napětí na mezi pevnosti  $\bar{\sigma}_{pt}$ .

$$\bar{\sigma}_{pt} = \sigma_{pt} \cdot \frac{S_0}{S_p} = Rm \cdot \frac{S_0}{S_p} = 525 \cdot 1,15 = 603,75 [MPa] \quad (3.2.9)$$

Nyní pomocí rovnice (2.2.24) získáme poměrné prodloužení na mezi pevnosti  $\varepsilon_{pt}$  a z něj pomocí rovnice (2.2.15) získáme poměrné prodloužení na skutečné mezi pevnosti  $\bar{\varepsilon}_{pt}$ .

$$\bar{\sigma}_{pt} = Rm \cdot (1 + \varepsilon_{pt}) \rightarrow \varepsilon_{pt} \quad (3.2.10)$$

$$\varepsilon_{pt} = \frac{\bar{\sigma}_{pt}}{Rm} - 1 = \frac{603,75}{525} - 1 = 0,15 [-] \quad (3.2.11)$$

$$\bar{\varepsilon}_{pt} = \ln(1 + \varepsilon_{pt}) = \ln(1 + 0,15) = 0,139 [-] \quad (3.2.12)$$

Dosadíme-li nyní všechny výše získané hodnoty do rovnice (3.2.1) můžeme určit úhel  $E_z$ .

$$\tan E_z = \frac{603,75 - 285}{0,139 - 1,357 \cdot 10^{-3}} = 2315,773 [MPa] \quad (3.2.13)$$

Pro popis materiálového chování jsme pro obě oceli zvolili Cowper – Symondsův model (viz kapitola 2.2.2). Toto chování materiálu je popsáno rovnicí

$$Y = (A + B\varepsilon_{pl}^n) \left( 1 + \left( \frac{\dot{\varepsilon}_{pl}}{D} \right)^{1/q} \right) \quad (3.2.14)$$

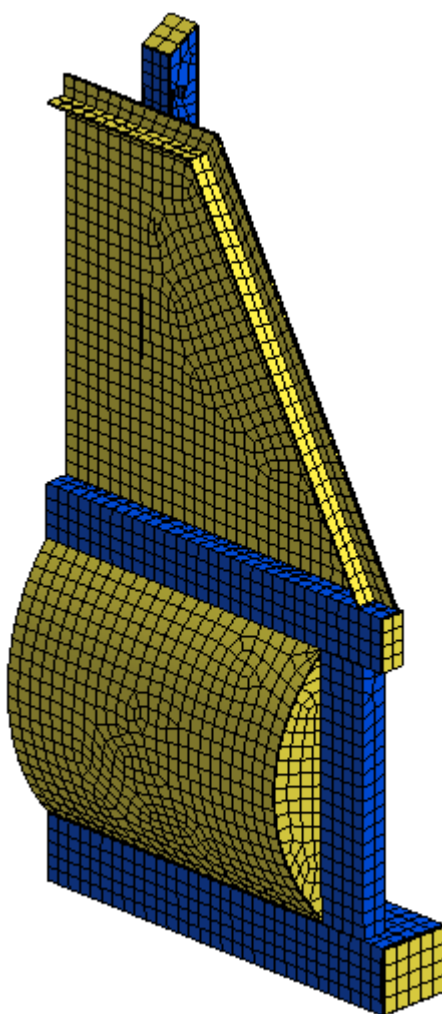
kde dosadíme za

$A$	je mez kluzu,
$B$	koeficient deformačního zpevnění,
$n$	je exponent deformačního zpevnění,
$D$ a $q$	jsou koeficienty rychlosti deformačního zpevnění.

Mez kluzu  $A$  jednotlivých ocelí získáme z tabulky (Tab. 3.2.2), koeficient deformačního zpevnění  $B$  odpovídá  $Ez$  z rovnic (3.2.7) a (3.2.13), exponent deformačního zpevnění  $n$  volíme roven jedné a koeficienty deformačního zpevnění  $D$  a  $q$  získáme z tabulky (Tab. 2.2.2) pro materiál měkká ocel.

### 3.2.3 Konečnoprvkový (FEM) model

Při tvorbě konečnoprvkového modelu se snažíme o optimalizaci sítě tak, abychom dosáhli co možná nejrovnoměrnější rozložení elementů. Velikost jednotlivých elementů by také měla být co nejvíce podobná, aby nedocházelo k neúměrnému prodlužování výpočtového času z důvodu jednoho nebo pár výrazně menších elementů. Dalším důvodem proč musíme mít co nerovnoměrnější síť je vznik tzv. hourglassingu, který je nežádoucí a způsobuje nestabilitu systému. Výsledná síť je zobrazena na obrázcích (Obr. 3.2.4).



Obr. 3.2.4 – FEM model

Použitý element	Skořepinový element programu AUTODYNA
Počet uzlů	4430
Počet elementů	3905

Tab. 3.2.3 – souhrn FEM model

### 3.2.4 Okrajové a počáteční podmínky a nastavení výpočtu

Z počátečních podmínek známe počáteční rychlost spodního nosníku  $v = 42 \text{ [m/s]}$ . Tato rychlost byla naměřena při experimentálním měření. Musíme si ale uvědomit, že rychlost není stejná pro celé dveře, protože se mění se vzdáleností od středu rotace. Z tohoto důvodu bude výhodné přepočítat tuto rychlost na rychlost uhlovou, která bude stejná pro celé dveře. Zároveň při tomto výpočtu spočítáme čas dopadu dveří na rám, který následně použijeme pro určení a nastavení konečného času pro výpočet. Tento výpočet času dopadu bude proveden podle teorie rovnoměrně zrychleného pohybu.

#### Výpočet času dopadu

Otevřené dveře svírají s rámem dveří úhel  $\alpha = 45^\circ \div 55^\circ$  a dopadají na rám dveří dopadovou rychlostí  $v = 42 \text{ [m/s]}$ . Všechny známé hodnoty jsou uvedeny v tabulce (Tab. 3.2.4).

Počáteční rychlost	$v_0 = 0 \left[ \frac{m}{s} \right]$
Dopadová rychlost	$v = 42 \left[ \frac{m}{s} \right]$
Úhel otevření	$\alpha = 50 [^\circ]$
Výška dveří (od uchycení po spodní hranu)	$R = 1,76 \text{ [m]}$

Tab. 3.2.4 – známé hodnoty pro výpočet

Základní vzorce rovnoměrně zrychleného rotačního pohybu:

$$\varphi = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot t^2 + \omega_0 \cdot t + \varphi_0 \quad (3.2.15)$$

$$\omega = \varepsilon \cdot t + \omega_0 \quad (3.2.16)$$

$$\omega = \sqrt{2 \cdot \varepsilon \cdot (\varphi - \varphi_0) + \omega_0^2} \quad (3.2.17)$$

Protože na začátku jsou hrázové dveře v klidu, tak budeme počítat s počáteční rychlostí dveří rovnou nule  $\omega_0 = 0 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right]$  a také počáteční dráha bude rovna nule  $\varphi_0 = 0 [\text{rad}]$ .

Před začátkem výpočtu si také musíme převést dopadovou rychlost hrázových dveří na úhlovou dopadovou rychlost. To se provede jednoduše pomocí převodního vztahu mezi přímočarým a rotačním pohybem (3.2.18).

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{42}{1,76} = 23,864 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right] \quad (3.2.18)$$

Dále si musíme převést úhel otevření dveří ze stupňů na radiány. To provedeme pomocí vztahu (3.2.19).

$$\varphi = \frac{\alpha \cdot \pi}{180} = \frac{50 \cdot \pi}{180} = 0,873 [\text{rad}] \quad (3.2.19)$$

Nyní můžeme přejít k samotnému výpočtu. Nejprve si určíme velikost zrychlení  $\varepsilon$  podle vztahu (3.2.20), který získáme úpravou vztahu (3.2.17).

$$\omega = \sqrt{2 \cdot \varepsilon \cdot (\varphi - \varphi_0) + \omega_0^2} \rightarrow \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2 \cdot (\varphi - \varphi_0)} \quad (3.2.20)$$

$$\varepsilon = \frac{23,864^2 - 0^2}{2 \cdot (0,873 - 0)} = 326,169 \left[ \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \right]$$

Čas dopadu hrázových dveří na rám dveří  $t$  vypočteme ze vztahu (3.2.21), který získáme úpravou ze vztahu (3.2.16).

$$\omega = \varepsilon \cdot t + \omega_0 \rightarrow t$$

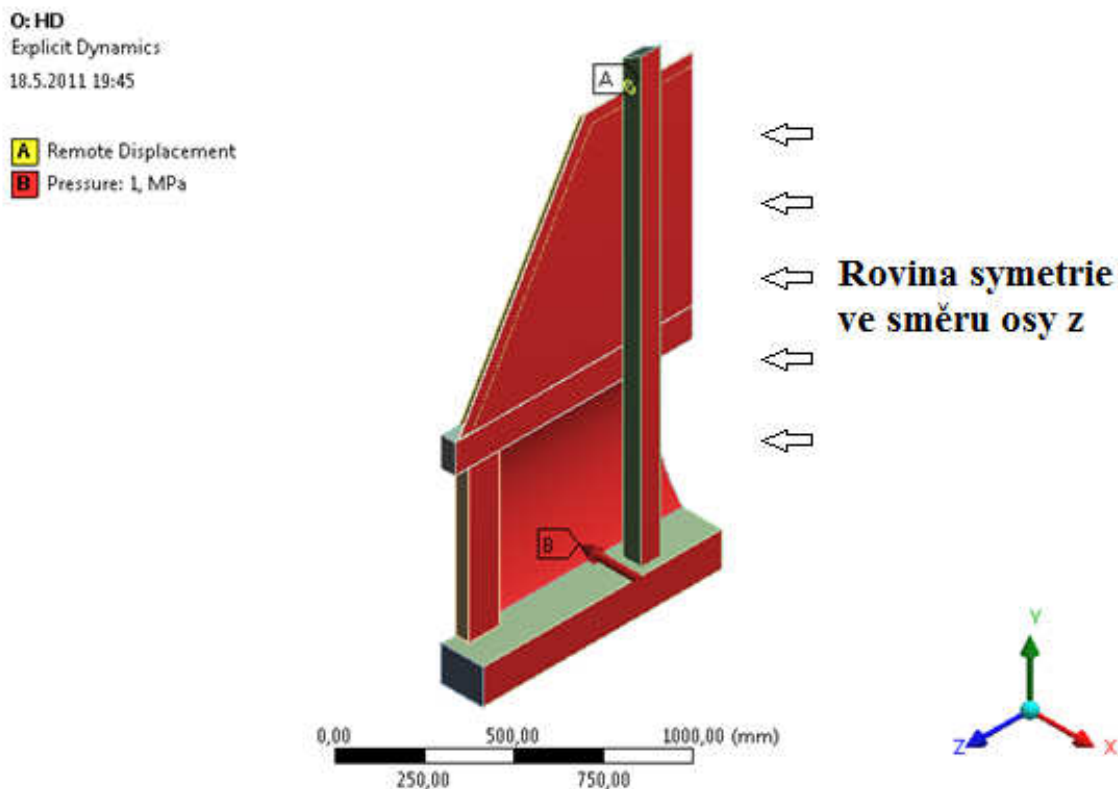
$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\varepsilon} \quad (3.2.21)$$

$$t = \frac{23,864 - 0}{326,169} = 0,0732 \text{ [s]}$$

Hrázové dveře dopadnou na rám rychlostí  $v = 42 \left[ \frac{m}{s} \right]$  za čas  $t = 73,2 \text{ [ms]}$ .

### Zadání počátečních a okrajových podmínek

Jako počáteční podmínka je tedy zadána uhlová rychlost  $\omega = 23,864 \text{ [rad/s]}$  na celé těleso se středem otáčení v otvoru pro uchycení dveří. Poslední okrajovou podmínkou je rovina symetrie. Zadání okrajových podmínek je pak zobrazeno na obrázku (Obr. 3.2.5).



Obr. 3.2.5 – Zadání okrajových podmínek

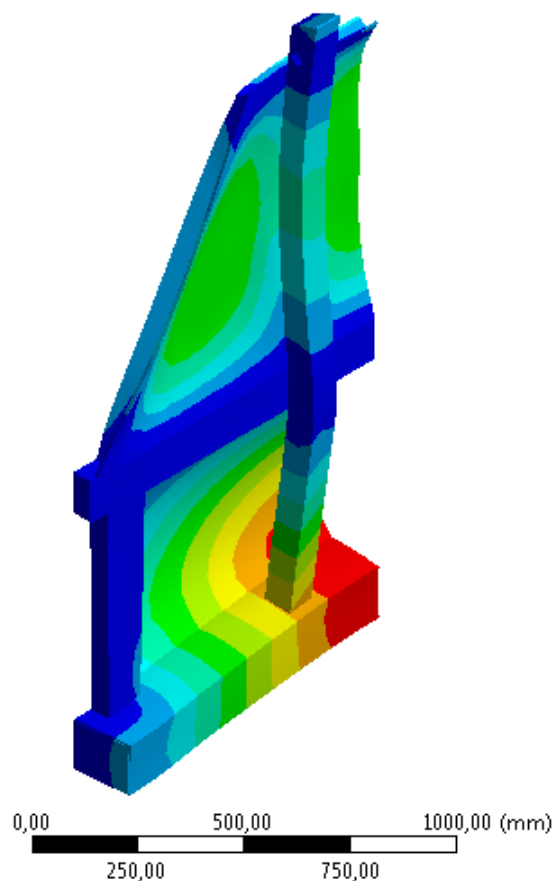
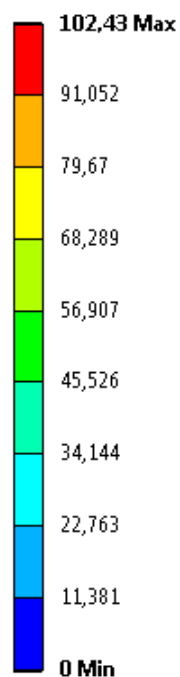
Na obrázku (Obr. 3.2.5) vidíme, kloubové uchycení dveří za otvor v nosníku určený uchycení dveří. Tato kloubová vazba je nastavena tak, aby bylo zabráněno všem posuvům a rotacím s výjimkou rotace kolem osy z. Dále je na celou zadní plochu dveří zadán tlak  $p = 1 \text{ [MPa]}$ . Poslední okrajová podmínka je uchycení rámu dveří pomocí vetknutí.

Do nastavení výpočtu musíme zadat konečný čas výpočtu, což v našem případě by měl stačit čas rovný přibližně dvojnásobku času dopadu ( $t_c = 2 \cdot t \cong 0,15 \text{ s}$ ). Dále zadáme typ integrace na exaktní formulaci a také tlumení pomocí Flanagan Belytschkova tlumení. Toto tlumení se zadává pomocí koeficientu viskózního tlumení, který nastavíme na hodnotu 0,15. Poslední co nastavíme je kritérium eroze elementů, tedy nastavení kritérií kdy dojde ke zničení elementu (patří sem třeba kritérium minima časového kroku, změny geometrie elementu, materiálové parametry atd.).

### **3.2.5 Výsledky numerického řešení**

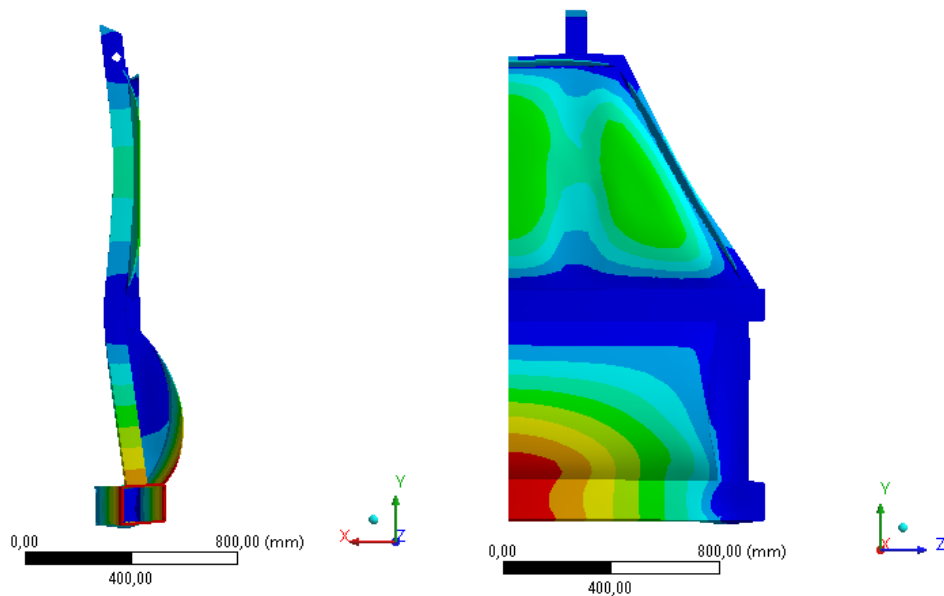
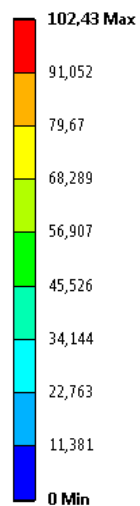
Jako první a pro nás nejdůležitější výsledek bude zobrazen celkový průhyb (viz obrázky Obr. 3.2.6 – 3.2.7), protože to je hodnota, kterou můžeme srovnat s analytickým řešením a výsledky experimentu. Dalšími zobrazenými výsledky je poté celkové redukované napětí podle hypotézy HMM (viz obrázky Obr. 3.2.8 – 3.2.9) a jako poslední budou zobrazena místa, kde dochází k plastické deformaci (viz obrázky Obr. 3.2.10 – 3.2.11). Na všech obrázcích pro větší přehlednost už není vyobrazen rám dveří, který byl definován jako absolutně tuhý.

O: HD  
 Total Deformation  
 Type: Total Deformation  
 Unit: mm  
 Time: 0,15  
 18.5.2011 7:41



Obr. 3.2.6 – Celkový deformace [mm]

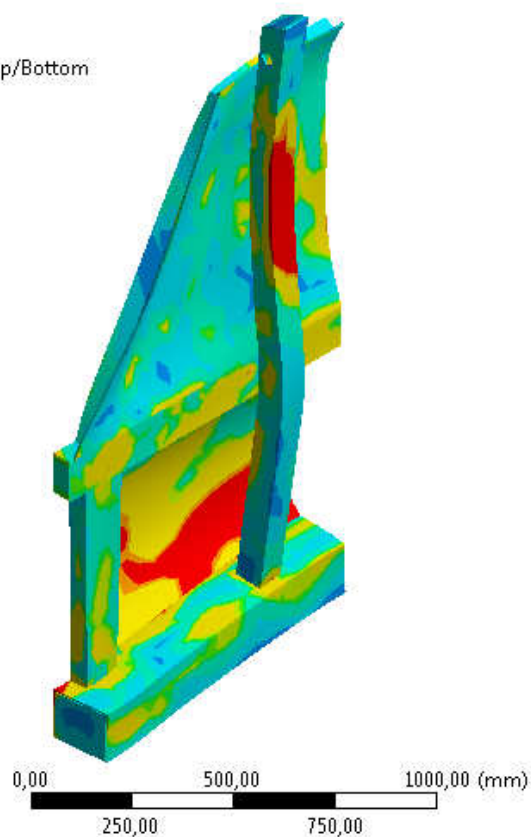
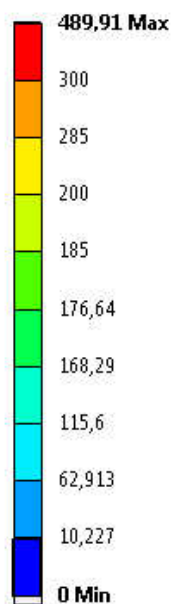
O: HD  
 Total Deformation  
 Type: Total Deformation  
 Unit: mm  
 Time: 0,15  
 18.5.2011 7:41



Obr. 3.2.7 – Celkový deformace [mm]

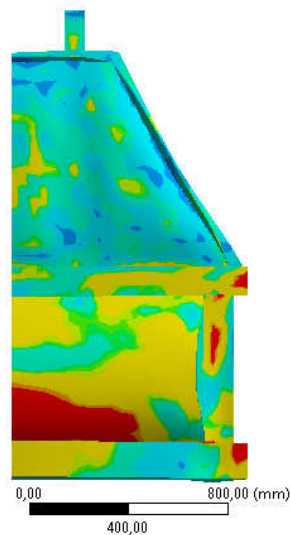
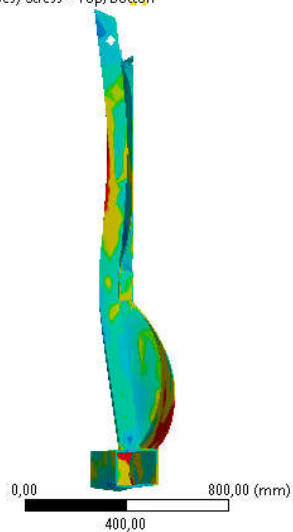
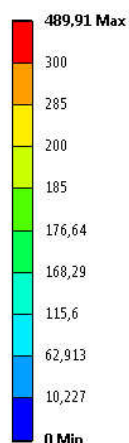


O: HD  
 Equivalent Stress  
 Type: Equivalent (von-Mises) Stress - Top/Bottom  
 Unit: MPa  
 Time: 0,15  
 18.5.2011 7:41



Obr. 3.2.8 – Napětí podle hypotézy HMH [MPa]

O: HD  
 Equivalent Stress  
 Type: Equivalent (von-Mises) Stress - Top/Bottom  
 Unit: MPa  
 Time: 0,15  
 18.5.2011 7:41



Obr. 3.2.9 – Napětí podle hypotézy HMH [MPa]

O: HD

Equivalent Plastic Strain

Type: Equivalent Plastic Strain - Top/Bottom

Unit: mm/mm

Time: 0,15

18.5.2011 7:41

0,11074 Max

0,098438

0,086133

0,073829

0,061524

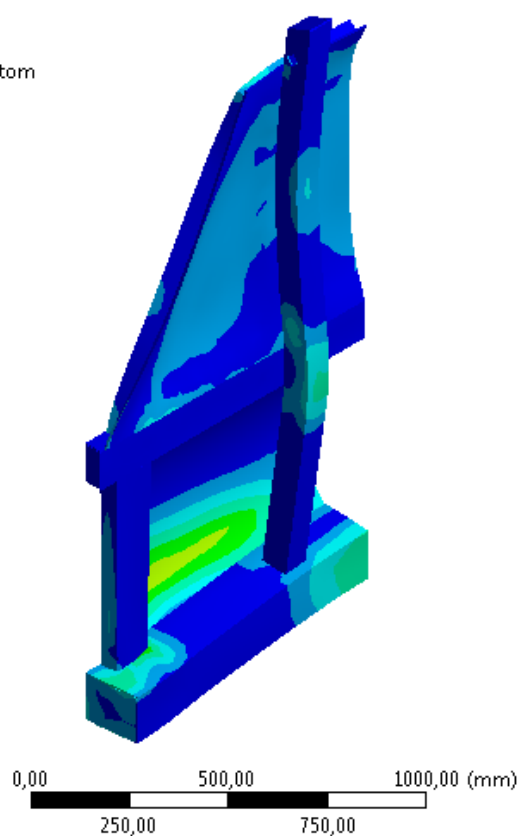
0,049219

0,036914

0,02461

0,012305

0 Min



Obr. 3.2.10 – Plastické deformace [mm/mm]

O: HD

Equivalent Plastic Strain

Type: Equivalent Plastic Strain - Top/Bottom

Unit: mm/mm

Time: 0,15

18.5.2011 7:41

0,11074 Max

0,098438

0,086133

0,073829

0,061524

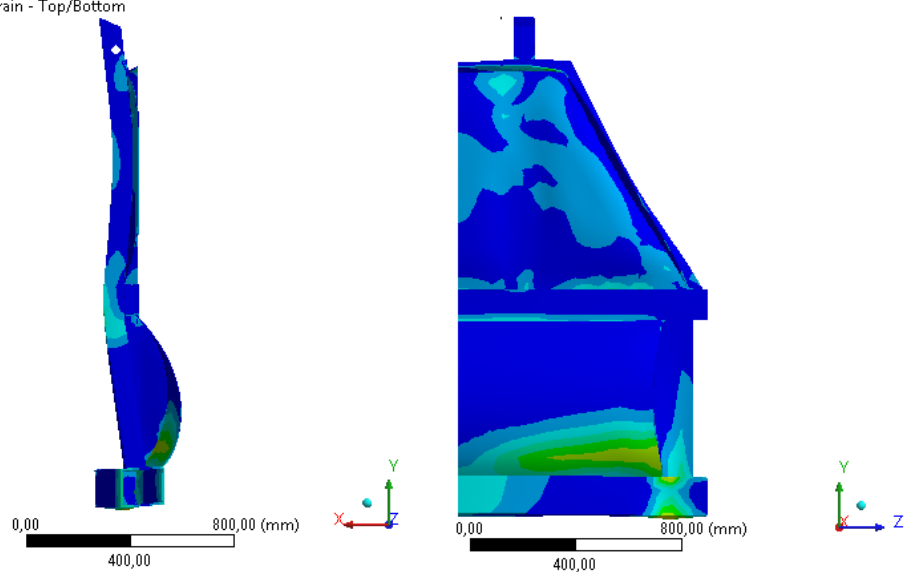
0,049219

0,036914

0,02461

0,012305

0 Min

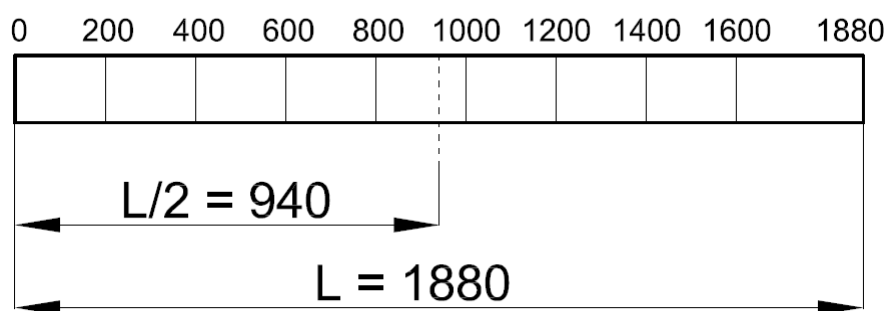


Obr. 3.2.11 – Plastické deformace [mm/mm]

Na předchozích obrázcích vidíme, že náš předpoklad největší deformace na spodním nosníku byl správný. Dále vidíme, že napětí podle hypotézy HMM překročí hodnotu meze kluzu. Bude tedy docházet k plastickým deformacím, jak je vidět na posledním obrázku.

### 3.3 Experimentální měření

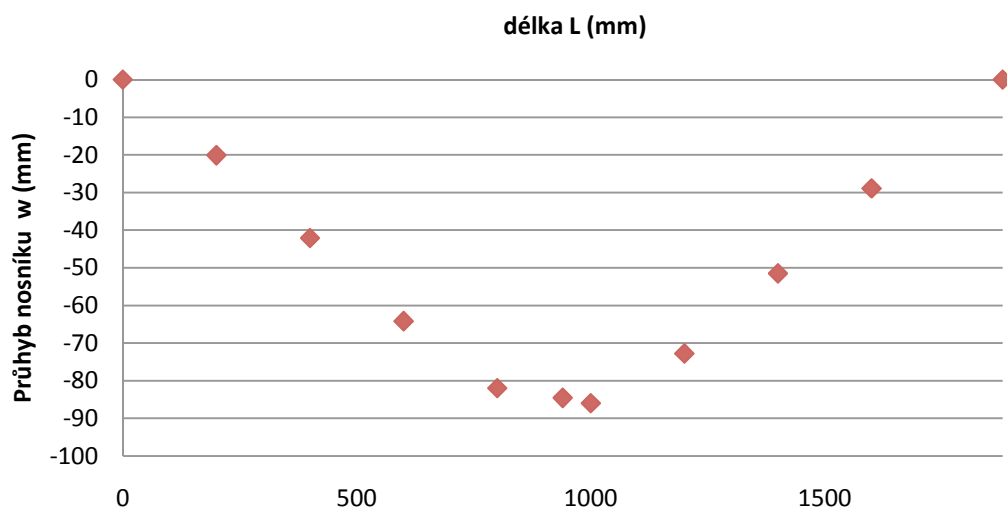
Experimentální měření bylo prováděno pomocí zkušebního odpalu ve zkušební štolě ve Štramberku. Zkušební výbuch byl simulován tak, aby výsledný zkušební tlak odpovídal hodnotě  $p = 1 \text{ [MPa]}$ . Tomuto tlaku odpovídá nárazová rychlost dveří při zavírání  $v_0 = 42 \text{ [m/s]}$ . Následně po odstřelu byly ve vybraných vzdálenostech (viz Obr. 3.3.1) změřeny průhyby spodního nosníku, který byl nejvíce deformován. Naměřené průhyby jsou uvedeny v tabulce (Tab. 3.3.1) a vyneseny na obrázku 3.3.2)



Obr. 3.3.1 – rozdělení nosníku při měření průhybu

$L \text{ [mm]}$	200	400	600	800	940	1000	1200	1400	1600
$\delta \text{ [mm]}$	20,1	42,1	64,2	82,0	84,6	86,0	72,8	51,5	28,9

Tab. 3.3.1 – naměřené průhyby pro tlak  $p = 1 \text{ [MPa]}$



Obr. 3.3.2 – průběh průhybu nosníku podle experimentu

### 3.4 Porovnání výsledků

Jako referenční hodnotu volíme výsledek experimentálního řešení průhybu nosníku. K této hodnotě budeme následně počítat chybu podle vztahu (3.4.1). Hodnota chyby a výsledky jednotlivých částí řešení jsou uvedeny v tabulce (Tab. 3.4.1).

$$chyba = \frac{|\delta_{max} - \delta_i|}{\delta_{max}} \cdot 100 \text{ [%]} \quad (3.4.1)$$

Metoda řešení	Velikost průhybu [mm]	Chyba [%]
Experimentální měření	$\delta = 84,600$	-
Analytické řešení s využitím koeficientu rázu $k_{dyn}$	$\delta = 96,314$	13,846
Analytické řešení podle teorie příčného rázu při ohybu nosníku	$\delta = 74,708$	11,693
Numerické řešení	$\delta = 102,43$	21,076

Tab. 3.4.1 – Porovnání výsledků

Z tabulky (Tab. 3.4.1) je patrné, že chyba u analytického výpočtu je menší než chyba u numerického výpočtu. Toto je způsobeno tím, že se numerický výpočet nepodařilo dokonale odladit. Případná chyba se tak u analytického výpočtu počítaného pro plné zatížení (bez odlehčení) pohybuje v rozumných mezích a výsledky jsou tedy přijatelné. Výsledek numerického výpočtu je potřeba brát s rezervou.

## 4. Závěrečné zhodnocení

Diplomová práce se zabývá návrhovým a kontrolní bezpečnostním výpočtem hrázových dveří. Tyto dveře se využívají jako bezpečnostní výbuchovzdorný prvek v dole a jsou tedy namáhány rázem a tlakovou vlnou.

V teoretické části byla probrána teorie rychlých dějů (rázů) a to s pohledu Newtonovy elementární teorie rázu, Hertzovy teorie dotyku, tak i s pohledu vlnové teorie rázu. Dále se v teoretické části zabýváme plastickým chováním materiálu a to zejména v oblasti závislosti materiálových vlastností na rychlosti deformace. Tato část je velmi důležitá hlavně s ohledem na numerické řešení, protože jsou v ní popsány materiálové modely používané v programu AUTODYN a můžeme tak do numerického výpočtu toto chování zahrnout. Posledním bodem teoretické části je zmínka a porovnání implicitního a explicitního řešení daného problému. Všechny tyto poznatky byly následně použity v praktické části při řešení dané úlohy, ať už analyticky nebo numericky.

V praktické části byl proveden nejprve analytický výpočet a to podle dvou teorií. V prvním případě byla využita Newtonova elementární teorie rázu a její část s použitím dynamického koeficientu pro výpočet průhybu a napětí. Tato teorie nám nahrazuje danou soustavu jednoduchou soustavou hmoty na pružině a je proto považována za méně přesnou metodu. Tato metoda se v praxi využívá především pro přibližný výpočet průhybu a napětí při dimenzování konstrukce. Druhá metoda vychází z vlnové teorie rázu a je založena na šíření napěťové vlny v dané součásti. Tato druhá metoda ač je přesnější, tak nám dává zkreslené výsledky a to hlavně z důvodu zanedbávání plastického chování materiálu.

Dále bylo provedeno numerické řešení pomocí MKP v programu AUTODYN, který pro řešení využívá explicitního řešení. Numerické řešení bylo provedeno na zjednodušeném skořepinovém modelu. Na obrázcích výsledků numerického řešení (Obr. 3.2.9 a Obr. 3.2.10) vidíme, že náš předpoklad největší deformace uprostřed spodního nosníku je splněn. Z porovnání výsledků s experimentem v tabulce (Tab. 3.4.1) ale vidíme, že chyba tohoto řešení je 21%. Toto je způsobeno tím, že i přes veškerou snahu a změny nastavení výpočtu se nepodařilo model dokonale vyladit.

Pro řešení analytického výpočtu se využívá zjednodušení, při kterém se zanedbává plastické chování materiálu. I přesto se ale dá ze získaných hodnot výsledků říci, že analytický výpočet je v tomto případě přesnější, protože jeho chyba od experimentálních hodnot se pohybuje okolo 10 %. Numerický výpočet má sice o něco větší chybu, ale ve své

podstatě potvrzuje výsledky analytického výpočtu. Ze všech těchto výpočtů a experimentu a následného porovnání hodnot v tabulce (Tab. 3.4.1) lze usoudit, že dveře výbuch ustojí s poměrně malou plastickou deformací vzhledem k celkovým rozměrům samotných hrázových dveří. Tato plastická deformace nám ale nevadí, protože hrázové dveře svůj účel splní a po použití se stejně musejí z bezpečnostních důvodů vyměnit za nové.

## 5. Seznam použitých pramenů

- [1.] TREBUŇA, František; ŠIMČÁK, František. *Odolnosť prvkov mechanických sústav*. Košice: Emilena Košice, 2004. 980 s. ISBN 80-8073-148-9
- [2.] TREBUŇA, František; ŠIMČÁK, František; JURICA, Vladimír. *Príklady a úlohy z pružnosti a pevnosti I... Košice*: Vienaľa Košice, 2000. 314 s. ISBN 80-7099-593-9
- [3.] BREPTA, Rudolf. *Rázy a vlny napětí v pevných elastických tělesech*. Praha : České vysoké učení technické v Praze, 1977. 324 s.
- [4.] MEDVEC, Andrej; STRADIOT, Juraj; ZÁHOREC, Ondrej; CABAN, Slavomír. *Mechanika III Dynamika*. Bratislava : Alfa SNTL, 1988. 505 s.
- [5.] PETERKA, František. *Úvod do kmitání mechanických soustav s vnitřními rázy*. Praha : ACADEMIA, 1981. 272 s.
- [6.] TIMOŠENKO, Štěpán. *Kmitání ve strojnictví*. Praha: Státní nakladatelství technické literatury, 1980. 362 s.
- [7.] BREPTA, Rudolf; PROKOPEC, Miroslav. *Šíření napětíových vln a rázy v tělesech*. Praha : ACADEMIA, 1972. 524 s.
- [8.] NĚMEC, Jaroslav; DVOŘÁK, Jan; HÖSCHL, Cyril. *Pružnost a pevnost ve strojírenství*. Praha: Nakladatelství technické literatury, 1989. 600 s. ISBN 80-03-00193-5
- [9.] LENERT, Jiří. *Pružnost a pevnost II*. Ostrava: VŠB - TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA, 2000. 174 s. ISBN 80-7078-572-1



- [10.] KRČÁL, Otakar; FRYDRÝŠEK, Karel; ADÁMKOVÁ, Ludmila. *Příklady z pružnosti a pevnosti I*. Ostrava: VŠB - TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA, 2008. 124 s. ISBN 978-80-248-1826-9.
- [11.] LENERT, Jiří. *Úvod do metody konečných prvků*. Ostrava: VŠB - TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA, 1999. 110 s. ISBN 80-7078-686-8
- [12.] BITTNAR, Zdeněk; ŠVEJNOHA, Jiří. *Numerické metody mechaniky I*. Praha: Vydavatelství ČVUT, 1992. 309 s. ISBN 80-01-00855-X
- [13.] MIROLJUBOV, I.N. *Řešení úloh z pevnosti a pružnosti*. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1976. 504 s.
- [14.] PEŠINA, Eugen; REIF, Pavel; VALENTA, František. *Sbírka příkladů z pružnosti a pevnosti*. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1964. 494 s.
- [15.] PEŠINA, Eugen. *Základy užití teorie plasticity*. Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1966. 188 s.
- [16.] HENRYCH, Josef. *Dynamika výbuchu a její užití*. Praha: ACADEMIA, 1973. 412 s.
- [17.] KAISER, Jaroslav; SLOŽKA, Vladimír; DICKÝ, Jozef; JURASOV, Vladimír. *Pružnost' a plasticita I*. Bratislava: Alfa SNTL, 1990. 584 s. ISBN 80-05-00579-2
- [18.] PODEŠVA, Jiří. *Dynamika v příkladech*. Ostrava: VŠB - TECHNICKÁ UNIVERZITA OSTRAVA, 2005. 196 s. ISBN 80-7078-678-7
- [19.] VOTIPKA, František; DEDOUCH, Karel; RADIL, Rudolf. *Dynamika sbírka příkladů*. Praha: České vysoké učení technické v Praze, 1987. 168 s.
- [20.] ŠMIŘÁK, Svatopluk. *Pružnost a plasticita I*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 1999. 212 s. ISBN 80-214-1151-1

- [21.] MAREK, Pavel. *Plasticita ocelových konstrukcí*. Praha: České vysoké učení technické v Praze, 1977. 119 s.
- [22.] JONES, Norman. *Structural Impact*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 575 s. ISBN 0-521-62890-3
- [23.] PLÁNIČKA, František; KULIŠ, Zdeněk. *Základy teorie plasticity*. Praha: České vysoké učení technické v Praze, 2009. 142 s. ISBN 978-80-01-04225-0.
- [24.] FURBACHER, Ivan. *Lexikon ocelí : materiálové listy se zahraničními ekvivalenty*. Praha : Dashöfer, 2006. - s. ISBN 80-86897-12-5
- [25.] ANSYS INC. *ANSYS Academic Research, Release 13.0 Help Systém, Theory reference*.

## **6. Poděkování**

Na tomto místě bych rád poděkoval pracovníkům katedry pružnosti a pevnosti při VŠB – TU Ostrava. Hlavně pak chci poděkovat panu Ing. Martinu Fuskovi, Ph.D. za cenné rady a pomoc.